Bolyai János

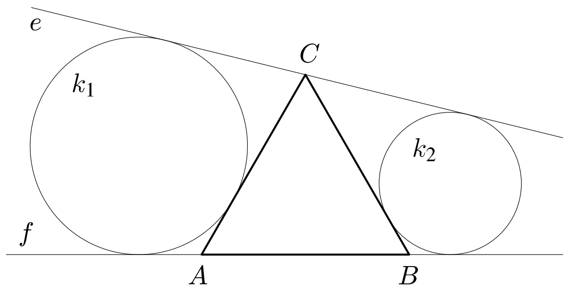
Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2009/2010-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

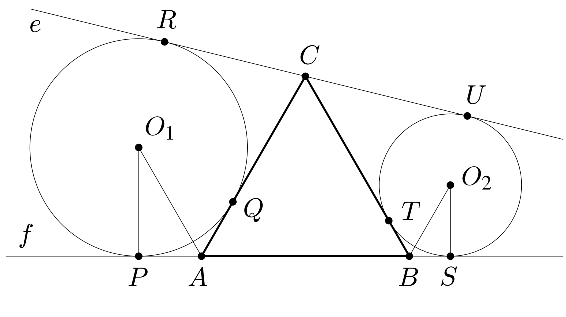
Megoldások és javítási útmutató

1. Az ABC szabályos háromszög oldalának hossza 10 egység. Az AB oldal egyenese f. A C csúcson keresztül olyan e egyenest húztunk, ami a háromszögön kívül halad. Ezután megrajzoltuk az ábrán látható módon a k_1 és k_2 köröket, amelyek érintik az e és f egyeneseket, továbbá a háromszög egy-egy oldalát kívülről.



Jelölje a körök sugarának hosszát r_1 és r_2. Bizonyítsuk be, hogy az $r_1 + r_2$ összeg értéke nem függ az e egyenes helyzetétől, és határozzuk meg ezt az értéket!

Megoldás. Jelöljük meg az érintési pontokat és a körök középpontját, továbbá vezessük be az ábrán látható jelöléseket:



Külső pontból a körhöz húzható érintőszakaszok egyenlők, tehát igazak a következők: $AP = AQ$, $CQ = CR$, $BS = BT$, $CU = CT$. 1 pont

Az érintőkörök középpontjai rajta vannak ABC megfelelő külső szögfelezőin, ezért az O_1PA és O_2BS derékszögű háromszögek A-nál, illetve B-nél fekvő belső szöge 60°. 1 pont

Innen $PA = \dfrac{r_1}{\sqrt{3}}$ és $SB = \dfrac{r_2}{\sqrt{3}}$. 1 pont

A fent megállapított egyenlőségeket használva:

$$RC = CQ = 10 - QA = 10 - AP = 10 - \frac{r_1}{\sqrt{3}}$$

és

$$UC = CT = 10 - TB = 10 - SB = 10 - \frac{r_2}{\sqrt{3}}.$$ 1 pont

Innen $RU = RC + CU = 20 - \dfrac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}}$. 1 pont

Végül felhasználjuk, hogy a k_1 és k_2 körök közös külső érintőszakaszai egyenlők, vagyis $RU = PS$. Ebből

$$20 - \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}} = RU = PS = AB + PA + BS = 10 + \frac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}}$$

következik. 1 pont

Átrendezve az egyenletet: $10 = 2 \cdot \dfrac{r_1 + r_2}{\sqrt{3}}$, ahonnan $r_1 + r_2 = 5 \cdot \sqrt{3}$. 1 pont

Azt kaptuk tehát, hogy a két sugár hosszának összege a szabályos háromszög magasságának hosszával egyezik meg.

Összesen: 7 pont

2. Az x, y, z valós számokra $x + y + z = 9$ és $x^2 + y^2 + z^2 = 33$ teljesül. Mely $(x; y; z)$ számhármas esetén lesz az yz szorzat értéke minimális?

Megoldás. Az $x + y + z = 9$ feltétel alapján $(y + z)^2 = (9 - x)^2$, azaz $y^2 + z^2 + 2yz = x^2 - 18x + 81$.

A második feltétel szerint pedig $y^2 + z^2 = 33 - x^2$.

A két összefüggés alapján $33 - x^2 + 2yz = x^2 - 18x + 81$, ahonnan rendezés után $yz = x^2 - 9x + 24$. 2 pont

Teljes négyzetté alakítással $yz = \left(x - \dfrac{9}{2}\right)^2 + \dfrac{15}{4}$.

A kapott alak alapján minimum lehet, ha $x = \dfrac{9}{2}$, ekkor yz minimuma $\dfrac{15}{4}$. 1 pont

$x = \dfrac{9}{2}$ esetén $y + z = \dfrac{9}{2}$ és $y^2 + z^2 = \dfrac{51}{4}$.

Az $y + z = \dfrac{9}{2}$, $y^2 + z^2 = \dfrac{51}{4}$ egyenletrendszer megoldása

$$y = \frac{9 \pm \sqrt{21}}{4}, \qquad z = \frac{9 \mp \sqrt{21}}{4}.$$ 2 pont

A megfelelő $(x;y;z)$ számhármasok így

$$\left(\frac{9}{2};\frac{9+\sqrt{21}}{4};\frac{9-\sqrt{21}}{4}\right) \quad \text{és} \quad \left(\frac{9}{2};\frac{9-\sqrt{21}}{4};\frac{9+\sqrt{21}}{4}\right).$$

(1 pont) (1 pont) 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Az $\{1;2;3;\ldots;20\}$ halmazból úgy választunk ki maximális számú elemet, hogy a kiválasztott számok közül bármelyik kettőnek a szorzata más-más számjegyre végződjön.

Hányféle választás lehetséges?

Megoldás. Legyen a maximálisan kiválasztható számok száma n. Először azt látjuk be, hogy $n<5$.

Ha ugyanis $n \geqq 5$, akkor a megfelelő szorzatok száma legalább $\binom{5}{2}=10$, így pedig lenne 0-ra végződő szorzat is. Ami azt jelenti, hogy a választott számok egyike 0-ra vagy 5-re végződik. Ez pedig lehetetlen, mert ekkor a szorzatok utolsó számjegye között legalább két azonos lesz, hiszen a többi választható szám közül legalább kettő azonos paritású. 1 pont

Az előző gondolatmenet alapján $n=4$ esetén sem lehet a választott számok végződése 0 vagy 5, de ezeket a végződéseket kizárva már ki lehet választani 4 megfelelő számot.

Ha pedig $n=4$, akkor az utolsó számjegyek csak az $\{1;2;3;4;6;7;8;9\}$ halmaz elemei lehetnek. 1 pont

Most belátjuk, hogy az iménti halmazból csak úgy választható ki megfelelő módon 4 darab szám, ha közülük pontosan egy darab páros.

Legyenek a választott számok végződései a, b, c, d, ahol $a,b,c,d \in \{1;2;3;4;6;7;8;9\}$.

A lehetséges szorzatok utolsó számjegye az ab, ac, ad, bc, bd, cd szorzatok végződése.

Amennyiben a, b, c, d közül legalább kettő páros szám, akkor például a és b páros volta esetén ab, ac, ad, bc, bd páros szám, ami lehetetlen, mert az adott halmazban csak 4 darab páros szám van. 1 pont

Tehát $n=4$ esetén a választott számok között pontosan 1 darab páros szám és 3 darab páratlan szám lehet, hiszen mind a négy választott szám nem lehet páratlan ($1\cdot 3$ és $9\cdot 7$ is 3-ra végződik). 1 pont

A választható 4 darab szám között nyilvánvalóan nem lehet két azonos végződésű szám.

Így pedig az $\{1;2;3;4;6;7;8;9\}$ halmazból – csak az utolsó számjegyeket tekintve – $4\cdot 4=16$-féleképpen lehet választani.

Mind a 16-féle választás megfelelő is.

Ezek a következők:

$$\begin{gathered}
(1;3;7;2),\quad (1;3;7;4),\quad (1;3;7;6),\quad (1;3;7;8),\\
(1;3;9;2),\quad (1;3;9;4),\quad (1;3;9;6),\quad (1;3;9;8),\\
(1;7;9;2),\quad (1;7;9;4),\quad (1;7;9;6),\quad (1;7;9;8),\\
(3;7;9;2),\quad (3;7;9;4),\quad (3;7;9;6),\quad (3;7;9;8).
\end{gathered}$$

2 pont

Az eredeti halmazból ezek alapján $16 \cdot 2^4 = 256$-féle módon választhatjuk ki a számokat, hiszen bármely megfelelő végződésű számból pontosan két darab van. 1 pont

Összesen: 7 pont