# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2009/2010-es tanév
# 2. (döntő) forduló
# kezdők III. kategória

### Megoldások és javítási útmutató

**1.** Léteznek-e olyan $t$ és $u$ pozitív egész számok, melyekre $7^t - 3^u$ osztható $10^{200}$-nal?

**Megoldás.** Tekintsük a $3^1, 3^2, 3^3, \ldots$ számokat. Ezen számok utolsó 200 jegyéből alkotható számok nem lehetnek mind különbözőek, hiszen csak véges sok különböző végződés lehet. Van tehát valamilyen $m$, illetve $n$ kitevő, melyekre $3^m$ és $3^n$ utolsó 200 jegye megegyezik. Ez azt jelenti, hogy $10^{200} \mid 3^m - 3^n = 3^n \cdot (3^{m-n} - 1)$. Mivel pedig 10 és 3 relatív prímek, ezért $10^{200} \mid 3^{m-n} - 1$. Van tehát olyan 3-hatvány, mely 1 maradékot ad $10^{200}$-nal osztva. Hasonlók mondhatók akkor, ha 3-hatványok helyett 7-hatványokról van szó, tehát van olyan 7-hatvány, mely szintén 1 maradékot ad $10^{200}$-nal osztva. Ha az alkalmas kitevőket $t$-vel, illetve $u$-val jelöljük, akkor azt kapjuk, hogy $7^t - 3^u$ osztható $10^{200}$-nal.

**2.** Jelölje $\pi_n$ az első $n$ páratlan prímszám szorzatát és legyen $k$ természetes szám! Igazolja, hogy a $(\pi_n + 1)^{2^k} - 1$ számnak legalább $n + k$ különböző prímosztója van!

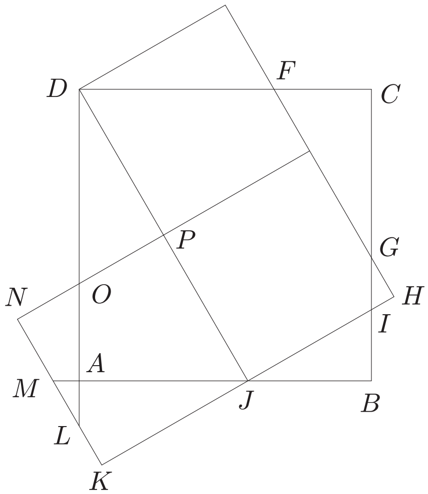
**Megoldás.** Mivel $x^m - 1$ osztható $(x - 1)$-gyel, $(\pi_n + 1)^{2^k} - 1$ osztható $\pi_n$-nel. Tehát csak azt kell igazolni van legalább $k$ darab a $\pi_n$ prímeitől különböző prímosztója.

Teljes indukcióval bizonyítjuk. Ha $k = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy $(\pi_n + 1)^{2^k} - 1$ rendelkezik legalább $k$ darab, a $\pi_n$ prímeitől különböző prímosztóval:

$$(\pi_n + 1)^{2^{k+1}} - 1 = \left((\pi_n + 1)^{2^k} - 1\right)\left((\pi_n + 1)^{2^k} + 1\right).$$

A jobb oldalon mindkét tényező páratlan és a különbségük 2, tehát a második tényezőnek van legalább egy az első tényező prímosztóitól különböző prímosztója, tehát a bal oldalnak van legalább $k + 1$ darab a $\pi_n$ prímeitől különböző prímosztója.

**3.** Daraboljon fel egy négyzetet legfeljebb 10 darabra úgy, hogy a darabokból három egybevágó négyzetet lehessen összerakni!




**1. megoldás.** Valójában 7 darabbal is megvalósítható a kívánt konstrukció.

Feltehetjük, hogy a kiindulásként rendelkezésre álló négyzet egységnyi oldalhosszúságú. Ekkor a három majdani kis négyzetnek az oldala $1/\sqrt{3}$ lesz. Fektessünk egy $1/\sqrt{3}$ oldalhosszúságú négyzetrácsot az egységnégyzetünkre az ábrán látható módon. A három kis négyzetnek az egységnégyzeten túlnyúló darabjai éppen alkalmasak lesznek arra, hogy a kis négyzetek által le nem fedett részeket kipótoljuk. Az ábrán látható kis háromszögek mindegyike derékszögű, másik két szögük 30, illetve 90 fokos. Mindre érvényes tehát az, hogy az átfogó éppen 2-szer akkora, mint a kisebbik befogó, a nagyobbik befogó pedig $\sqrt{3}/2$-szerese az átfogónak. Ennek felhasználásával a háromszögek oldalai mind kiszámolhatók. Tudjuk, hogy $DE = 1/\sqrt{3}$. Ebből $DF = 2/3$, valamint $EF = 1/3$. $FC = DC - DF = 1 - 2/3 = 1/3$. Innen már következik, hogy $DFE$ egybevágó $GFC$-vel. Hasonlóan egyszerűen adódik, hogy $DOP$ egybevágó $JMK$-val, hiszen a hosszabbik befogójuk mindkét esetben egy kis négyzetnek az oldala, azaz $1/\sqrt{3}$ hosszú. Már csak a $JIB$ háromszöget kell valahogy összeraknunk az $NMAO$ négyszög, illetve a $GIH$ háromszög segítségével. Láttuk, hogy $DP = 1/\sqrt{3}$. Ebből $OP = 1/3$. Tehát $NO = 1/\sqrt{3} - 1/3 = \left(\sqrt{3} - 1\right)/3$. Innen

$$NL = \sqrt{3} \cdot NO = 1 - \left(1/\sqrt{3}\right).$$

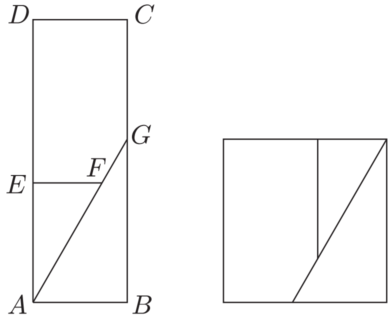
Mivel $AD = 1$, ezért az $AJD$ háromszögből $AJ = 1/\sqrt{3}$. Tehát $JB = 1 - \left(1/\sqrt{3}\right)$. Tehát $NL = JB$, azaz $NLO$ egybevágó $BJI$-vel, vagyis akár le is fedhetnénk a $BJI$ háromszöget az $NLO$ háromszöggel. A gond csak az, hogy így az $MLA$ háromszöget 2-szer is használjuk, míg az $IGH$ háromszöget egyszer sem. Készen leszünk tehát a bizonyítással, ha belátjuk, hogy $MLA$ és $IGH$ egybevágóak.

Láttuk, hogy $JB = 1 - \left(1/\sqrt{3}\right)$. Innen

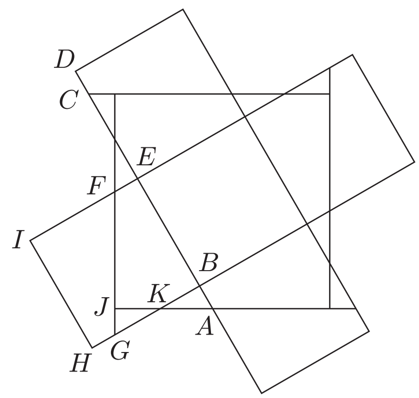
$$JI = \left(1 - \left(1/\sqrt{3}\right)\right) \cdot \left(2/\sqrt{3}\right) = 2/\sqrt{3} - 2/3.$$

Mivel pedig $IH = JH - JI$, ezért $IH = 1/\sqrt{3} - 2/\sqrt{3} + 2/3 = 2/3 - 1/\sqrt{3}$. A $JMK$ háromszögből $JM = \left(2/\sqrt{3}\right) \cdot JK = \left(2/\sqrt{3}\right) \cdot \left(1/\sqrt{3}\right) = 2/3$, valamint láttuk, hogy $AJ = 1/\sqrt{3}$. Innen $MA = JM - AJ = 2/3 - 1/\sqrt{3}$. Tehát $IH = MA$, azaz $MLA$ és $IGH$ valóban egybevágóak.

A kétszer használt $MLA$ háromszög tehát egyik esetben kiváltható az $IGH$ háromszöggel.




**2. megoldás.** A feladat megoldható úgy is, hogy az eredeti négyzetet 9 darabra vágjuk. Legyen az eredeti négyzet oldala egységnyi hosszú. Bontsuk fel a négyzetet három téglalapra, melyek oldalai $1/3$, illetve 1 egységnyiek. Egy ilyen téglalapot az ábra szerint három részre vágva, egy $1/\sqrt{3}$ oldalú négyzetet rakhatunk össze belőle. Az ábrán $AB = CD = 1/3$; $ED = BG = 1/\sqrt{3}$; $AE = GC = 1 - 1/\sqrt{3}$. ■




**3. megoldás.** Helyezzünk az egységoldalú négyzetre egy $1/\sqrt{3}$ oldalú négyzetrácsot az ábra szerint úgy, hogy a középső négyzet szimmetria-középpontja egybeessen az egységoldalú négyzet középpontjával, a megfelelő oldal-egyenesek pedig 30, ill. 60 fokos szöget zárjanak be egymással. Ekkor $AC = 2/\sqrt{3}$. Mivel viszont $BD$ szintén $2/\sqrt{3}$ hosszú, így $AB = CD$. Szimmetria okokból egyrészt $AB = EF$, másrészt $CD = GH$. Így tehát $EF = GH$, vagyis a $GBEF$ trapéz egybevágó az $FIHG$ trapézzal. Ezért a $GBEF$ trapéz területe az $1/\sqrt{3}$ oldalú $HBEI$ négyzet területének fele. Ugyanekkora területű az $AEFJ$ négyszög is, hiszen négy elforgatott példánya együtt éppen 2 kis négyzetnyi területet ad. Ezek szerint az $ABK$ és a $GJK$ háromszögek azonos területűek, tehát egybevágók is, hiszen megfelelő szögeik megegyeznek. Innen már közvetlenül adódik a megfelelő átdarabolás 9 darabbal. ■