Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók I. kategória

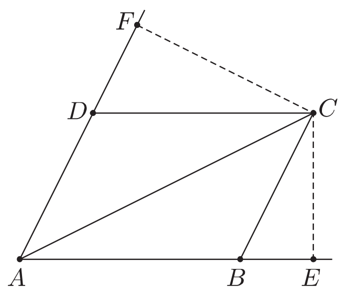
Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsa be, hogy ha az $ABCD$ paralelogramma hosszabbik átlója AC, C merőleges vetülete AB-n E, AD-n F, akkor

$$AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2.$$

Igaz-e az állítás az $AC < BD$ esetben?

Megoldás.



A BEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2.$$

Ezt felhasználva és az AEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2 - BE^2 =$$
$$= AE^2 + BC^2 - (AE - AB)^2 =$$
$$= AE^2 + BC^2 - AE^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2.$$

Tehát

(1) $$AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2.$$ 1 pont

A DFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$DC^2 = DF^2 + CF^2.$$

Ezt felhasználva és az AFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$AC^2 = AF^2 + CF^2 = AF^2 + DC^2 - DF^2 = AF^2 + DC^2 - (AF - AD)^2 =$$
$$= AF^2 + DC^2 - AF^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$

Tehát

(2) $$AC^2 = DC^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$ 1 pont

(1)-et és (2)-t összeadva

$$2 \cdot AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2 + DC^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$

Felhasználva, hogy $AB = DC$ és $BC = AD$,

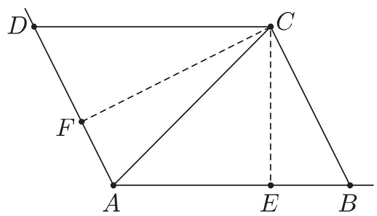
$$2 \cdot AC^2 = 2 \cdot AB \cdot AE + 2 \cdot AD \cdot AF,$$

amiből

$$AC^2 = AB \cdot AE + AD \cdot AF.$$ 1 pont

Ha $AC < BD$, akkor két lehetőség van.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $AB > AD$. Ekkor E az AB oldal belső pontja.



1. eset: Ha F az AD oldal belső pontja.

A BEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2.$$

Ezt felhasználva és az AEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2 - BE^2 = AE^2 + BC^2 - (AB - AE)^2 =$$
$$= AE^2 + BC^2 - AE^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2.$$

Tehát

(1) $$AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2.$$

A DFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$DC^2 = DF^2 + CF^2.$$

Ezt felhasználva és az AFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$AC^2 = AF^2 + CF^2 = AF^2 + DC^2 - DF^2 = AF^2 + DC^2 - (AD - AF)^2 =$$
$$= AF^2 + DC^2 - AF^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$

Tehát

(2) $$AC^2 = DC^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$ 1 pont

(1)-et és (2)-t összeadva:

$$2 \cdot AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2 + DC^2 + 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$

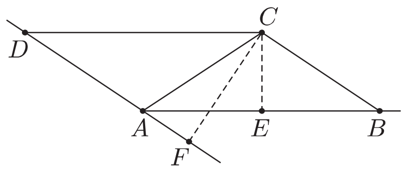
Felhasználva, hogy $AB = DC$ és $BC = AD$:

$$2 \cdot AC^2 = 2 \cdot AB \cdot AE + 2 \cdot AD \cdot AF,$$

amiből

$$AC^2 = AB \cdot AE + AD \cdot AF.$$

Tehát ebben az esetben az állítás igaz. 1 pont



2. eset: Ha F az AD oldal külső pontja.

A BEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$BC^2 = BE^2 + CE^2.$$

Ezt felhasználva és az AEC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = AE^2 + BC^2 - BE^2 = AE^2 + BC^2 - (AB - AE)^2 =$$
$$= AE^2 + BC^2 - AE^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2.$$

Tehát

(1) $$AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2.$$

A DFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$DC^2 = DF^2 + CF^2.$$

Ezt felhasználva és az AFC derékszögű háromszögben felírva a Pitagorasz-tételt:

$$AC^2 = AF^2 + CF^2 = AF^2 + DC^2 - DF^2 = AF^2 + DC^2 - (AD + AF)^2 =$$
$$= AF^2 + DC^2 - AF^2 - 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$

Tehát

(2) $$AC^2 = DC^2 - 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$ 1 pont

(1)-et és (2)-t összeadva:

$$2 \cdot AC^2 = BC^2 + 2 \cdot AB \cdot AE - AB^2 + DC^2 - 2 \cdot AD \cdot AF - AD^2.$$

Felhasználva, hogy $AB = DC$ és $BC = AD$:

$$2 \cdot AC^2 = 2 \cdot AB \cdot AE - 2 \cdot AD \cdot AF,$$

amiből

$$AC^2 = AB \cdot AE - AD \cdot AF.$$

Tehát ebben az esetben az állítás nem igaz. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Eszter naponta legalább egyszer bejelentkezik a Facebook-ra; de hogy ne vigye túlzásba, egy héten 12-nél többször sosem jelentkezik be. Mutassuk meg, hogy ki lehet választani néhány olyan egymás után következő napot, amelyek során összesen pontosan 20-szor jelentkezik be.

Megoldás. Tegyük fel, hogy Eszter az egyik hétfőn a_1-szer, hétfőn és kedden a_2-ször, hétfőn, kedden és szerdán a_3-szor és így tovább, k hét után, azaz $7k$ nap alatt összesen a_{7k}-szor jelentkezett be a Facebook-ra. 1 pont

Tekintsük az $A = \{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{7k}, a_1 + 20, a_2 + 20, \ldots, a_{7k} + 20\}$ számhalmazt. Az a_1, a_2, a_3, $\ldots$, a_{7k} számok között nincs két egyenlő, mivel mindennap legalább egyszer bejelentkezik, és így hasonlóképp, az $a_1 + 20$, $a_2 + 20$, $\ldots$, $a_{7k} + 20$ számok között sem lehetnek egyenlőek. 2 pont

Összesen 2-szer $7k$ napunk, azaz $14k$ napunk van, amelyek közül egyik sem nagyobb, mint $12k + 20$, mert Eszter egyik héten sem jelentkezik be 12-nél többször. 1 pont

Ha $14k$ meghaladja $12k + 20$-at, akkor lesz legalább két egyenlő számunk az A halmazban, és a fentiek alapján létezik olyan m és n érték, hogy $a_m = a_n + 20$, és ez azt jelenti, hogy $a_m - a_n = 20$, azaz hogy $m - n$ nap alatt, az $n + 1$-től az m-edikig bezárólag Eszter 20-szor jelentkezett be a Facebook-ra. 2 pont

A $14k > 12k + 20$ egyenlőtlenség megoldása, $k > 10$, ami azt jelenti, hogy ha legalább 11 hétig vizsgálódunk, biztosan lesznek olyan egymást követő napok, amelyeken Eszter összesen pontosan 20-szor jelentkezik be a Facebook-ra. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Teljes értékű az a megoldás is, amikor a fenti konstrukciót rögtön 11 (vagy több) hétre készíti el a versenyző.

3. Két pozitív szám szorzata megegyezik az összegükkel. Mindkét szám olyan véges tizedestört, amely a tizedesvessző után két számjegyet tartalmaz úgy, hogy az utolsó számjegy 0-tól különböző. Melyik ez a két szám?

Megoldás. Legyen a keresett két szám a és b, ahol $0 < a \leqq b$.

Az $ab = a + b$ feltétel alapján $b(a - 1) = a$, ahonnan $a > 1$ következik. 1 pont

A $b = \dfrac{a}{a-1} \geqq a$ feltétel alapján pedig $a \leqq 2$ adódik. A feladat feltételei alapján így az a szám egészrésze 1. 1 pont

Az eddigiek alapján $a = 1 + m_1$, $b = k + m_2$ alakú, ahol $m_1 = \dfrac{10x + y}{100}$, $k \in \mathbb{Z}^+$, $m_2 = \dfrac{10z + u}{100}$, x, y, z, u pedig számjegyek.

Mivel $(1 + m_1)(k + m_2) = 1 + m_1 + k + m_2$, ezért

$$k + m_2 + km_1 + m_1m_2 = 1 + m_1 + k + m_2, \quad \text{azaz} \quad (k - 1)m_1 = 1 - m_1 \cdot m_2,$$

így pedig $k - 1 + m_2 = \dfrac{1}{m_1}$.

Jelöléseink alapján ekkor $100(k - 1) + 10z + u = \dfrac{100^2}{10x + y}$. 2 pont

A bal oldal pozitív egész szám, ezért $(10x + y)$ osztója $100^2 = 2^4 \cdot 5^4$-nek.

$1 \leqq 10x + y < 100$ és $y \neq 0$, így $10x + y$ lehetséges értékei: 1, 2, 4, 5, 8, 16, 25 lehet csak. 1 pont

A felsorolt értékek közül egyedül a 16 felel meg a feltételeknek. 1 pont

Ekkor $a = 1{,}16$, így $b = \dfrac{a}{a - 1}$ alapján $b = 7{,}25$.

Az $a = 1{,}16$, $b = 7{,}25$ számok valóban megfelelnek a feladat feltételeinek, hiszen $1{,}16 \cdot 7{,}25 = 1{,}16 + 7{,}25 = 8{,}41$. 1 pont

Összesen: 7 pont