

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
kezdők II. kategória

Feladatok

1. Egy konferencián magyar, angol, francia, német, olasz és spanyol tudósok vettek részt. Valaki észrevette, hogy mindenkinek pontosan hat ismerőse van jelen, mind a hat nemzetből pontosan egy. (Az ismeretségek kölcsönösek, és senki nem számít a saját maga ismerőseinek.)

a) Bizonyítsuk be, hogy a résztvevők száma osztható 12-vel!

b) Bizonyítsuk be, hogy ha n 12-vel osztható pozitív egész szám, akkor valóban létezik ilyen konferencia pontosan n résztvevővel!

2. Egy háromszög egyik csúcsából a másik két csúcshoz tartozó két belső és két külső szögfelezőre merőlegeseket állítunk. Ezek a szögfelezőket a D , E , F és G pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy ez a négy pont egy egyenesre illeszkedik!

3. Tudjuk, hogy $a + \frac{1}{a} = p$, ahol p prímszám. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$A = a^4 + a^3 + a^2 + \frac{1}{a^4} + \frac{1}{a^3} + \frac{1}{a^2}$$

egész szám! Mennyi a p értéke, ha A -nak négy pozitív osztója van?