Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
3. (döntő) forduló
Haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg azokat a négyzetszámokat, amelyekre igaz, hogy ha felcseréljük két utolsó számjegyüket, továbbra is négyzetszámot kapunk!

Megoldás. Egy négyzetszám utolsó számjegye 0, 1, 4, 5, 6 vagy 9 lehet.

Ha az utolsó számjegy 0, akkor az eredeti szám $10k$; $k \in \mathbb{N}^+$ alakú. Egy ilyen szám négyzete osztható százzal, tehát minden $(10k)^2$; $k \in \mathbb{N}^+$ négyzetszám megoldás. 1 pont

Ha az utolsó számjegy 5, az eredeti szám $10k+5$; $k \in \mathbb{N}$ alakú, ennek négyzete pedig $100l+25$; $l \in \mathbb{N}$ alakú, de ebben az esetben az utolsó két számjegy megfordítása 52-re végződő számot ad és ez nem lehet négyzetszám. 1 pont

Tehát a megfelelő négyzetszámok utolsó jegye 1, 4, 6 vagy 9 lehet.

Ha az utolsó két számjegy különböző, akkor a $(14;41)$, $(16;61)$, $(19;91)$, $(46;64)$, $(49;94)$, $(69;96)$ végződéspárok jöhetnek szóba. 1 pont

Mivel egy négyzetszám 4-gyel osztva 0 vagy 1 maradékot ad, ezért csak a $(16;61)$, $(69;96)$ végződéspárok maradnak. 1 pont

Tekintettel arra, hogy $51^2-50^2=101$, ezért ha az utolsó két számjegy különböző, az 50-nél nagyobb számok négyzete már a százas helyiértéken is különbözik, így elegendő az 50 alatti számok négyzetében keresni a megfelelő végződéspárokat, sőt mivel $(50-k)^2$ és k^2 ugyanúgy végződik, ezért elegendő a 25 alatti számok négyzetét vizsgálni.

Ezek közül csak a $13^2=169$ és a $14^2=196$ felel meg a feltételeknek. 1 pont

Ha az utolsó két számjegy azonos, akkor a 4-gyel való oszthatóságot vizsgálva, csak a 44-re végződő négyzetszámok jöhetnek szóba.

A végződéseket vizsgálva megállapíthatjuk, hogy a 12, 62, 38, 88 végződésű számok négyzete végződik 44-re.

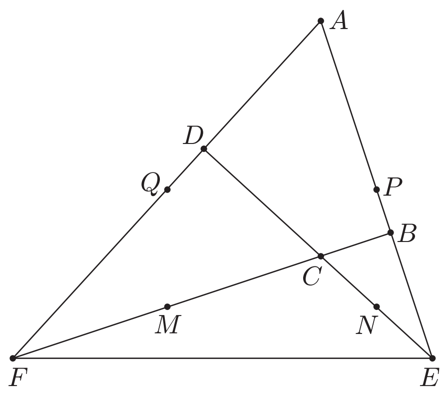
Tehát a feladatnak megoldási még az $(50k \pm 12)^2$; $k \in \mathbb{N}$ alakú négyzetszámok. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. Az AFE hegyesszögű háromszög ED és FB magasságvonalai a C pontban metszik egymást. Az M, N, P, Q pontok rendre az FC, EC, AE, AF szakaszok felezőpontjai. Bizonyítsuk be, hogy $MNPQ$ téglalap.

Megoldás.



Mivel M, N, P, Q felezési pontok, az MN, NP, PQ, QM szakaszok rendre a CFE, CAE, AFE és AFC háromszögek középvonalai. 2 pont

Ezért MN és $1/2FE$, valamint PQ és $1/2FE$ párhuzamos és egyenlő egymással. 1 pont

Tehát MN párhuzamos és egyenlő PQ-val, tehát $MNPQ$ paralelogramma. 1 pont

Mivel C magasságpont, EF és az AC magasságvonal merőlegesek egymásra, 1 pont

és MN párhuzamos FE-vel, és QM párhuzamos AC-val, így MN merőleges QM-re, 1 pont

tehát $MNPQ$ téglalap. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Az x, y, z valós számokra $x + y + z = 5$ és $xy + yz + zx = 8$ teljesül. Igazoljuk, hogy x, y, z bármelyikének értéke legalább 1, de legfeljebb $\frac{7}{3}$.

Megoldás. Az első egyenletből $x = 5 - (y + z)$, ezt a másikba írva $\big(5 - (y + z)\big)(y + z) + yz = 8$. Rendezzük a kapott összefüggést:

$$\begin{aligned}\big(5 - (y + z)\big)(y + z) + yz &= 8\\ 5y + 5z - y^2 - z^2 - 2yz + yz &= 8\\ y^2 + y(z - 5) + z^2 - 5z + 8 &= 0.\end{aligned}$$

2 pont

A kapott egyenletet y-ban másodfokú paraméteres egyenletnek tekintjük, és megvizsgáljuk, milyen feltételt szab z-re az, hogy a diszkrimináns nem lehet negatív (hiszen feltettük, hogy létezik x, y és z). 2 pont

$$\begin{aligned}D(z) = (z - 5)^2 - 4(z^2 - 5z + 8) &\geqq 0\\ -3z^2 + 10z - 7 = -3(z - 1)\left(z - \frac{7}{3}\right) &\geqq 0.\end{aligned}$$

1 pont

A lefele nyíló parabola a két zérushelye között nemnegatív, vagyis valóban $1 \leqq z \leqq \frac{7}{3}$. Az indoklás x-re és y-ra pontosan ugyanígy elmondható, tehát mindhárom változó a megadott korlátok közé esik. 1 pont

Végül megmutatjuk, hogy léteznek a feltételeknek megfelelő valós számok.

$x=y=2$, $z=1$ illetve $x=y=\dfrac{4}{3}$, $z=\dfrac{7}{3}$ esetén teljesülnek az egyenlőségek, és z felveszi valamelyik szélsőértékét. 1 pont

---

Összesen: 7 pont