Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
2. forduló
haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen $f(x) = ax + b$ egy elsőfokú polinom. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet az

$$\left|f(0) - 1\right|, \quad \left|f(1) - 3\right|, \quad \left|f(2) - 9\right|$$

számok mindegyike 1-nél kisebb.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem teljesül, azaz mégis létezik olyan polinom, hogy a három szám mindegyike kisebb 1-nél. 1 pont

Az elsőből $|b - 1| < 1$, azaz $0 < b < 2$,
a másodikból $|a + b - 3| < 1$, azaz $2 < a + b < 4$,
a harmadikból $|2a + b - 9| < 1$, azaz $8 < 2a + b < 10$ adódik. 3 pont

Az első és a harmadik összegét 2-vel osztva $4 < a + b < 6$ következik. 2 pont

Ezt összevetve a másodikkal ellentmondásra jutunk, ezzel igazoltuk az állítást. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Határozzuk meg azokat a négyjegyű számokat, ahol az első két számjegyből álló szám és az utolsó két számjegyből álló szám összegének négyzete egyenlő az eredeti számmal!

Megoldás. Legyen a keresett szám $\overline{abcd}$. Ekkor $\overline{abcd} = \left(\overline{ab} + \overline{cd}\right)^2$.

Legyen $x = \overline{ab}$, $y = \overline{cd}$. Így az egyenlet az alábbi alakot ölti: $(x + y)^2 = 100x + y$. 1 pont

Átrendezve:

$$(x + y)^2 - (x + y) = 99x \implies (x + y)(x + y - 1) = 99x.$$ 1 pont

Mivel $x + y$ és $x + y - 1$ relatív prímek, ezért csak különböző prímosztóik lehetnek. 1 pont

$a)$ 11 is és 9 is osztója az $x + y$ számnak. Ekkor a 20 és 198 közötti egész számok közül az egyetlen lehetséges megoldás: $x + y = 99$, ebből $x = 98$ és $y = 1$. A keresett szám a 9801. 1 pont

$b)$ 11 osztója az $x + y$, 9 osztója az $x + y - 1$ számnak. Ekkor a 20 és 198 közötti egész számok közül az egyetlen lehetséges megoldás: $x + y = 55$, ebből $x = 30$ és $y = 25$. A keresett szám a 3025. 1 pont

c) 9 osztója az $x+y$, 11 osztója az $x+y-1$ számnak. Ekkor a 20 és 198 közötti egész számok közül az egyetlen lehetséges megoldás: $x+y=45$, ebből $x=20$ és $y=25$. A keresett szám a 2025. 1 pont

d) A 11 és 9 osztója az $x+y-1$ számnak nem fordulhat elő, mert ekkor x 99-nél nagyobb lenne. 1 pont

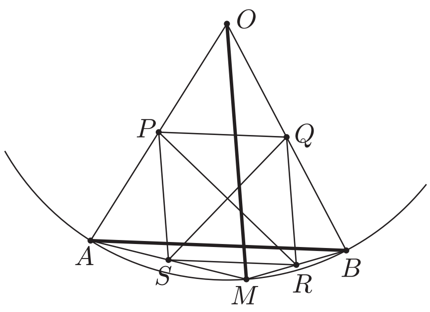
---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha az $a)-c)$ részben csak a helyes megoldásokat találja meg, de nem utal arra, hogy más megoldás nincs, erre a részre 1 pontot kaphat.

3. Az O középpontú körvonal két pontja A és B, továbbá $AOB\sphericalangle = 60°$. A rövidebb AB ív tetszőleges belső pontja M. Bizonyítsuk be, hogy az $OBMA$ négyszög középvonalai egymásra merőlegesek. (A négyszög középvonalainak a szemközti oldalak felezőpontját összekötő szakaszokat nevezzük.)

Megoldás.



Készítsünk ábrát a feladat szövege alapján.

A feladat állításában szereplő középvonalak a PR és QS szakaszok.

Először megmutatjuk, hogy $PQRS$ paralelogramma. Az ABO háromszögben PQ középvonal, ezért párhuzamos AB-vel, és fele akkora. Hasonlóan az AMB háromszögben SR középvonal, ezért szintén párhuzamos AB-vel, és ugyancsak fele akkora. A két észrevételt összegezve PQ és RS párhuzamos egymással, és hosszuk megegyezik, vagyis $PQRS$ valóban paralelogramma. 2 pont

A fentiekhez hasonlóan az is megkapható, hogy a PS és QR szakaszok az OM szakasszal párhuzamosak és egymással egyenlő hosszúak. 1 pont

Azt akarjuk belátni, hogy a $PQRS$ paralelogramma átlói egymásra merőlegesek. Ez pontosan akkor teljesül, ha a paralelogramma rombusz is egyben. 1 pont

Ez a fentiek alapján akkor lesz igaz, ha $AB=OM$, hiszen $PQ=\frac{1}{2}AB$ és $QR=\frac{1}{2}OM$. 1 pont

Ez pedig igaz, hiszen AOB szabályos háromszög, vagyis AB egyenlő a kör sugarával, így OM-mel is. 2 pont

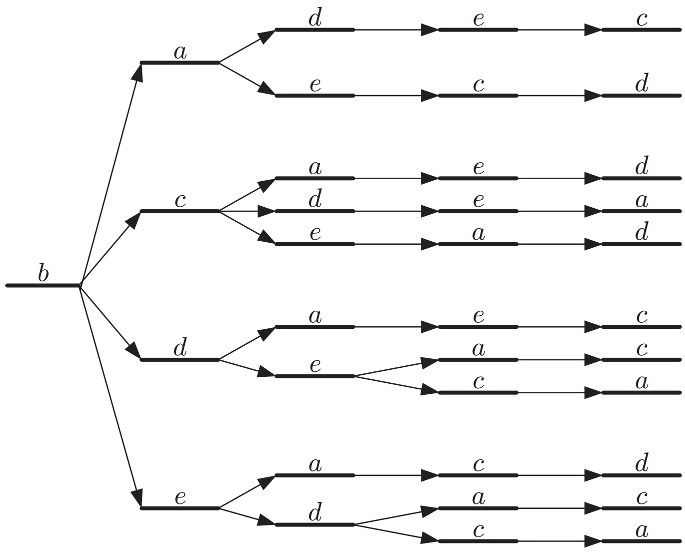
---

Összesen: 7 pont

4. Soma az ötödik születésnapi bulijára 5 barátját hívhatta meg. El is készült az 5 névre szóló meghívó, és készült hozzá 5 felcímzett boríték is. Soma azonban még nem tud olvasni, és úgy rakta be a borítékokba a meghívókat, hogy végül senki sem a sajátját kapta kézhez. Hányféleképpen lehet így elrendezni a meghívókat?

I. megoldás. Jelöljük a meghívott gyerekeket A, B, C, D, E-vel, a nekik megcímzett borítékokat a, b, c, d, e-vel.

Az A meghívója a b, c, d és e borítékjába kerülhetett. Ha A meghívója a b-nek címzett borítékba került, akkor a B meghívója az a, c, d és e körül kerülhetett ki. A további lehetőségeket ábrázoljuk az alábbi fagráffal:



A függőleges oszlopokban rendre A, B, C, D és E lehetséges borítékjai szerepelnek. 5 pont

Mivel az az eset, amikor A a c, d vagy e borítékban kapja a meghívóját, teljesen szimmetrikus a fentivel, ezért négyszer ennyi a megoldás. 1 pont

Azaz összesen 44-féle lehetőség van, amikor senki sem kapja a saját meghívóját. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Amennyiben (akár rendszer nélkül, de) az összes lehetőséget felsorolja, azért is jár a 7 pont. Amennyiben a felsorolásból akár egy is hiányzik, vagy hibásan szerepel, akkor összesen maximálisan már csak 4 pont adható.

II. megoldás. Jelöljük T_i-vel azon elrendezések számát, ahol i darab meghívó esetén egyik sincs a helyén. Ekkor $T_2 = 1$. 1 pont

i darab meghívó esetén számoljuk ki úgy a jó esetek számát, hogy az összes lehetséges elrendezésből levonjuk azokat az eseteket, amikor $1, 2, \ldots, i-2$ a helyén van. Ha $i-1$ meghívó a helyén van, akkor következésképpen mind a helyén van. 1 pont

3 meghívó esetén az első meghívót 3, a másodikat 2, a harmadikat 1 embernek borítékolhatjuk. Az összes lehetőség száma $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3! = 6$.

Ebből lehet egy meghívó a helyén. Három hely van, ha egy a helyén van, akkor $T_2 = 1$-féleképpen oszthatjuk ki a meghívókat, hogy egyik se legyen a helyén. És egy olyan eset van, amikor mind a három a helyén van. Így

$$T_3 = 3! - \binom{3}{1} T_2 - 1 = 6 - 3 \cdot 1 - 1 = 2,$$

$$T_3 = 2.$$ 1 pont

Ha négy meghívót vizsgálunk, akkor az összes lehetőségek száma 4!, mivel az elsőt 4, a második meghívót 3, a harmadik meghívót 2 és a negyedik meghívót 1-féle helyre lehet rakni. Ha egy meghívó a helyén van, azt négy hely közül választhatjuk ki. A maradék három helyre kell úgy elhelyezni a meghívókat, hogy már ne legyen egy se a helyén. Az előbb látottak szerint ezt $T_3 = 2$-féleképpen tehetjük meg. Lehet továbbá az, hogy kettő van a helyén. A négy elemből kettőt 6-féleképpen választhatunk ki. A maradék kettőt pedig egyféleképpen tudjuk elrendezni úgy, hogy egyik se legyen a helyén. És végül egy olyan eset van, amikor mind a négy a helyén van:

$$T_4 = 4! - \binom{4}{1} T_3 - \binom{4}{2} T_2 - 1 = 24 - 4 \cdot 2 - 6 \cdot 1 - 1 = 9,$$

$$T_4 = 9.$$ 1 pont

Teljesen hasonlóan adódik az öt meghívó esete: Az összes meghívót 5!-féleképpen helyezhetem el. Ha egy van a helyén, akkor azt ötféleképpen választhatom ki, és a maradék négyet az előbb kiszámolt $T_4 = 9$-féleképpen lehet elhelyezni. 1 pont

10-féleképpen lehet az ötből kettő a helyén, és ugyanennyi az, amikor három van a helyén. Amikor kettő van a helyén, akkor a három meghívót 2-féleképpen, amikor három van a helyén, akkor a kettő meghívót 1-féleképpen rendezhetem el. 1 pont

Végül itt is marad az az eset, amikor mindegyik a helyén van. És így az ötmeghívós eset:

$$T_5 = 5! - \binom{5}{1} T_4 - \binom{5}{2} T_3 - \binom{5}{3} T_2 - 1 = 120 - 5 \cdot 9 - 10 \cdot 2 - 10 \cdot 1 - 1 = 44,$$

$$T_5 = 44.$$ 1 pont

Azaz 44 olyan elrendezés van, amikor nincs egyik meghívó sem a saját borítékjában.

Összesen: 7 pont