Kezdők III. kategória, 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Két egységsugarú kör metszi egymást az A, B pontokban. Húzzuk meg a két kör egyik közös külső érintőjét, a keletkező érintési pontok legyenek E és F, ekkor $EBFA$ egy konkáv négyszög.

Legfeljebb mekkora lehet ennek a négyszögnek a területe?

Milyen messze van a két kör középpontja egymástól, ha a négyszög területe maximális?

2. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ az $1, 2, \ldots, 200$ számok valamilyen sorrendben. Adjuk meg az $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ számokat úgy, hogy az $(a_i - b_j)^2$ ($1 \leqq i \leqq 100$, $1 \leqq j \leqq 100$) számok összege a lehető legkisebb legyen!

3. Egy 16 tagú összejövetelen a vendégek kézfogással üdvözölték egymást (de nem biztos, hogy mindenki mindenkivel kezet fogott). Valaki észrevette, hogy bármelyik két vendéghez található két másik, akik mindkettejükkel kezet fogtak.

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy van olyan vendég, aki legalább 6 másik vendéggel fogott kezet!

$b)$ Biztosan van-e olyan vendég, aki 7 másik vendéggel fogott kezet?

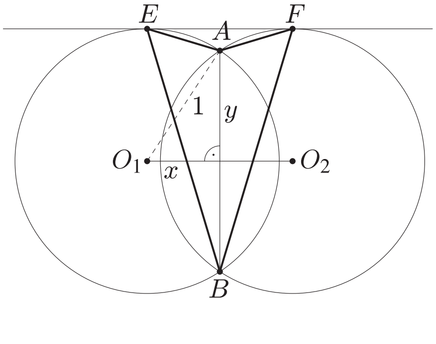
Megoldások és javítási útmutató

1. Két egységsugarú kör metszi egymást az A, B pontokban. Húzzuk meg a két kör egyik közös külső érintőjét, a keletkező érintési pontok legyenek E és F, ekkor $EBFA$ egy konkáv négyszög.

Legfeljebb mekkora lehet ennek a négyszögnek a területe?

Milyen messze van a két kör középpontja egymástól, ha a négyszög területe maximális?

Megoldás.



Készítsünk ábrát, a körök középpontjait jelöljük O_1, O_2-vel.

Szimmetria okokból $EBFA$ egy deltoid, a keresett területet pedig EBF és EAF egyenlőszárú háromszög területének különbsége adja meg. A körközéppontok távolságát jelöljük $2x$-szel ($0 < x < 1$, hiszen 2 metszéspont van), a körök metszéspontjainak távolságát pedig $2y$-nal, s mivel egységkörökről van szó, így $x^2 + y^2 = 1$.

Mindkét háromszög alapja $2x$, az egyik magassága $1+y$, a másiké $1-y$, így a területeik különbsége:

$$t_{EBFA} = \frac{2x(1+y)}{2} - \frac{2x(1-y)}{2} = 2xy.$$

A mértani és a négyzetes közepek közti egyenlőtlenség alapján

$$\sqrt{xy} \leqq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Vagyis $\sqrt{xy}$ nem haladhatja meg $\sqrt{\frac{1}{2}}$-et, s ezt pontosan akkor veszi fel, ha $x = y = 1/\sqrt{2}$.

Ekkor $xy = 1/2$, azaz a kérdéses terület 1 területegység. Ekkor a körközéppontok távolsága $2 \cdot 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

2. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ az $1, 2, \ldots, 200$ számok valamilyen sorrendben. Adjuk meg az $a_1, a_2, \ldots, a_{100}, b_1, b_2, \ldots, b_{100}$ számokat úgy, hogy az $(a_i - b_j)^2$ ($1 \leqq i \leqq 100$, $1 \leqq j \leqq 100$) számok összege a lehető legkisebb legyen!

Megoldás. A kérdéses összeget írjuk át a következő módon:

$$S = \sum_{i=1}^{100} \sum_{j=1}^{100} (a_i - b_j)^2 =$$

$$= 100\left(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{100}^2 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_{100}^2\right) -$$

$$- 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}) =$$

$$= 100\left(1^2 + 2^2 + \ldots + 200^2\right) - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}).$$

Ez azt jelenti, hogy S akkor minimális, ha az $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{100})$ szorzat maximális.

A számtani–mértani közepek közötti egyenlőtlenség szerint

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_{100})(b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}) \leqq$$

$$\leqq \left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} + b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 + 2 + \ldots + 200}{2}\right)^2,$$

és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_1 + a_2 + \ldots + a_{100} = b_1 + b_2 + \ldots + b_{100}$.

Ez pontosan akkor fordulhat elő, ha az első 200 pozitív egész számot szét lehet osztani két darab 100-as csoportba úgy, hogy azokban a számok összege megegyezzen. Ez persze megtehető, alkossa például az $\{1; 200\}$, …, $\{100; 101\}$ párok közül 50 az egyik csoportot, 50 a másikat. Azaz például, az $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, …, $a_{50} = 50$, $a_{51} = 151$, $a_{52} = 152$, …, $a_{100} = 200$, $b_1 = 51$, $b_2 = 52$, …, $b_{100} = 150$, egy jó megoldás.

3. Egy 16 tagú összejövetelen a vendégek kézfogással üdvözölték egymást (de nem biztos, hogy mindenki mindenkivel kezet fogott). Valaki észrevette, hogy bármelyik két vendéghez található két másik, akik mindkettejükkel kezet fogtak.

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy van olyan vendég, aki legalább 6 másik vendéggel fogott kezet!

$b)$ Biztosan van-e olyan vendég, aki 7 másik vendéggel fogott kezet?

Megoldás. $a)$ Indirekt tegyük fel, hogy minden vendég csak legfeljebb 5 másikkal fogott kezet.

Legyen A és B két vendég. Az összes olyan vendégnek, aki kezet fogott A-val és B-vel, adjunk egy cédulát azzal a felirattal, hogy „Te kezet fogtál A-val és B-vel". Ezután tegyük ezt meg A és B helyett a vendégekből alkotott összes párral. Most számoljuk le a kiosztott cédulákat kétféleképp.

Egyrészt bármely A, B-hez két olyan ember is van, akinek róluk szóló cédulát adtunk: azoknak, akik A-val és B-vel is kezet fogtak. A 16 emberből $16 \cdot 15/2 = 120$ pár alkotható, páronként legalább két cédulát kiosztottunk, így a kiosztott cédulák száma $120 \cdot 2 = 240$.

Másrészt egy rögzített embernél pontosan annyi cédula van, ahány párt lehet alkotni azokból az emberekből, akikkel kezet fogott (minden egyes a vele kezet fogott emberekből alkotott párról szóló cédula van nála, és másmilyen nincs). Mivel egy rögzített ember legfeljebb 5 másikkal fogott kezet, összesen legfeljebb $5 \cdot 4/2 = 10$ cédula lehet nála. Ez a 16 emberre összesen legfeljebb $16 \cdot 10 = 160$ cédula.

Azaz a kiosztott cédulák száma egyrészt legalább 240, másrészt legfeljebb 160, ami ellentmondás.

$b)$ Nem. Jegyezzük fel a 16 vendég nevét egy 4×4-es táblázatba, és fogjon mindenki kezet a vele egy sorban vagy egy oszlopban állókkal.

A feltétel teljesül: ha két ember egy sorban (illetve egy oszlopban) van, akkor az a két ember, aki velük egy sorban (illetve egy oszlopban) van, mindkettejükkel kezet fogott; ha két ember nincs sem egy sorban, sem egy oszlopban, akkor vegyük fel a rajtuk átmenő sorokat és oszlopokat, ezeknek rajtuk kívüli két metszéspontjában álló emberek mindkettejükkel kezet fogtak.

Világos azonban, hogy mindenki pontosan 6 emberrel fogott kezet (a sorában és az oszlopában is 3-3 ember van rajta kívül).