Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
2. forduló
Haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. 2016-tól kezdve csökkenő sorrendben leírtuk egymás után a pozitív egész számokat, így megkaptuk a 201620152014…10987654321 számot.

a) Hány jegyű ez a szám?

b) Bizonyítsuk be, hogy a szám osztható 3-mal!

Megoldás. a) Leírtunk 9 db 1 jegyű, 90 db 2 jegyű, 900 db 3 jegyű és $2016 - 999 = 1017$ db 4 jegyű számot. 1 pont

Így a felírt szám $9 + 180 + 2700 + 4068 = 6957$ számjegyből áll. 1 pont

b) A 3-mal való oszthatóságot, illetve az esetleges maradékokat a számjegyek összege mutatja meg. 3 egymás utáni szám közül az egyik 0, a másik 1, a harmadik 2 maradékot ad 3-mal osztva, és ugyanezt adják a számjegyeik összegei is. 1 pont

Így ha 3 egymást követő számot egymás után leírunk, a kapott szám jegyeinek összege 3-mal osztva $0 + 1 + 2$ maradékával egyezik meg, ami 0, azaz a szám mindig osztható lesz 3-mal. 2 pont

A feladatban kitűzött szám számjegyeit hármas csoportokba lehet úgy osztani, hogy minden csoportban a számjegyek összege 0 maradékot adjon, mivel 2016 osztható 3-mal. Így az összes számjegy összege osztható 3-mal, azaz az eredeti szám is. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a tanuló csupán 1-től 2016-ig összeadja a számokat, és ennek az összegnek nézi a hármas maradékát, de nem bizonyítja be, hogy a számok egymás után írásával kapott szám hármas maradéka egyenlő a számok összegének hármas maradékával, akkor a b) rész 5 pontjából két pontot kaphat.

2. Milyen a és b valós értékekre lesz a $\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} + \sqrt{x} = 2016$ egyenletnek végtelen sok megoldása a valós számok halmazán?

Megoldás. Átrendezve az egyenletet kapjuk, hogy

$$\sqrt{x + a\sqrt{x} + b} = 2016 - \sqrt{x}.$$

Mivel a bal oldalon nemnegatív szám áll, ezért a jobb oldal is nemnegatív, így $x \leqq 2016^2$. A négyzetgyök értelmezhetősége miatt $x \geqq 0$. Tehát $0 \leqq x \leqq 2016^2$ esetén van megoldása az egyenletnek. 2 pont

Négyzetre emelve kapjuk, hogy:

$$x + a\sqrt{x} + b = 2016^2 - 2 \cdot 2016 \cdot \sqrt{x} + x. \qquad \text{1 pont}$$

Rendezzük át $\sqrt{x}$-re:

$$(a + 2 \cdot 2016)\sqrt{x} = 2016^2 - b. \qquad \text{1 pont}$$

Csak akkor kapunk végtelen sok megoldást, ha $\sqrt{x}$ együtthatója és a jobb oldal is nulla. Ebben az esetben $a = -2 \cdot 2016 = -4032$ és $b = 2016^2 = 4\,064\,256$. 2 pont

A kapott a és b értéket behelyettesítve ellenőrizhetjük a megoldásunkat, amennyiben feltesszük, hogy $0 \leqq x \leqq 2016^2$:

$$\sqrt{x - 2 \cdot 2016\sqrt{x} + 2016^2} + \sqrt{x} = \sqrt{\left(2016 - \sqrt{x}\right)^2} + \sqrt{x} = \left|2016 - \sqrt{x}\right| + \sqrt{x} =$$
$$= 2016 - \sqrt{x} + \sqrt{x} = 2016. \qquad \text{1 pont}$$

Azaz minden $0 \leqq x \leqq 2016^2$ valós x megoldása az egyenletnek.

Összesen: 7 pont

3. A 100-nál kisebb prímszámok közül válasszunk ki ötöt úgy, hogy ezek számjegyei között az 1-től 9-ig terjedő számjegyek mindegyike pontosan egyszer forduljon elő. Hányféleképpen lehetséges ez?

Megoldás. Az öt számban szereplő számjegyek száma csak úgy lehet egyenlő a rendelkezésre álló számjegyek számával, 9-cel, ha köztük 4 két jegyű és 1 egyjegyű van. 1 pont

A kétjegyűek utolsó számjegye nem lehet páros és nem lehet az 5-ös, tehát csak az 1, 3, 7, 9 számok közül kerülhet ki. Eszerint a négy kétjegyű szám utolsó jegye – valamilyen sorrendben – éppen a fenti négy szám, és emiatt ezek másutt nem szerepelhetnek. Az egyjegyű prímszámok közül így csak a 2 és az 5 jöhet szóba. 1 pont

Vizsgáljuk először azt az esetet, amikor a kiválasztott egyjegyű szám a 2, ekkor a négy kétjegyű első jegye a 4, 5, 6, 8 közül kerül ki; és a szóba jövő prímek a következők (jegyeik szerint elrendezve):

41	–	61	–
43	53	–	83
47	–	67	–
–	59	–	89

Azt kell meghatároznunk, hányféleképpen választhatunk ki a fenti alakba rendezett számok közül négyet úgy, hogy mindegyik sorból és mindegyik oszlopból pontosan egyet válasszunk. 1 pont

Ha az első sorból a 41-et választjuk, akkor a harmadik sorból már csak a 67-et választhatjuk, és a másik két szám választására két lehetőségünk marad: az 53, 89 pár és az 59, 83 pár. Ez eddig két eset. Ha az első sorból a 61-et választjuk, a harmadik sorból csak a 47-et választhatjuk, és a másik két szám megválasztására ugyanaz a két lehetőségünk van, mint az előbb. Itt tehát 4-féleképpen választhatjuk meg a 4 kétjegyű számot. 2 pont

Ugyanennyi a lehetőségek száma, ha egyjegyűnek a 5-öt választjuk, hiszen a másik négy számra szóba jöhető számok ugyanúgy rendezhetők, mint az előbb:

41	–	61	
43	23	–	83
47	–	67	–
–	29	–	89

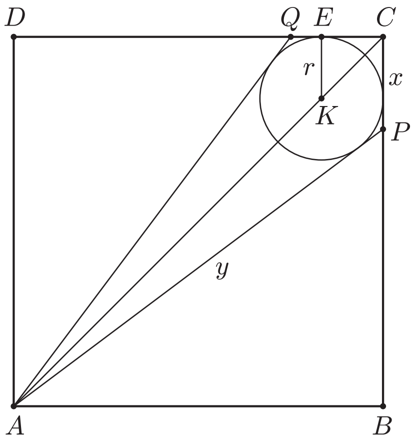
(csak az előbbi második oszlop helyére léptek a 2-essel kezdődő prímek), és itt ugyanaz a feladatunk, mint előbb. Ebben az esetben is a 4 a megfelelő választások száma. 1 pont

Tehát összesen 8-féleképpen választhatjuk ki a számokat. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Az $ABCD$ egységnyi oldalú négyzetben a BC és CD oldalak egy-egy belső pontja P, illetve Q. Az $APCQ$ négyszögbe olyan kör írható, amelynek K középpontjára $KA : KC = 5$ teljesül. Mekkora az $APCQ$ négyszög területe?
(*In memoriam Bartha Gábor*)

Megoldás.



Használjuk az ábra jelöléseit!

Mivel a kör érinti a négyzet oldalait, ezért középpontja rajta van az AC átlón, és a tengelyes szimmetria miatt a keletkező négyszög deltoid.

ACD és KCE hasonló háromszögekből:

$$\frac{r}{AD} = \frac{KC}{AC} = \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{1}{6}.$$ 1 pont

Mivel az érintő merőleges a sugárra, ezért APK, PCK, CQK, QAK háromszögek magassága a beírt kör sugara.

Felírjuk a négyszög területét a háromszögek területének összegeként:

$$T = \frac{1}{2} \cdot (2yr + 2xr), \quad \text{ebből} \quad r = \frac{T}{x+y}.$$ 1 pont*

Pitagorasz tétele alapján a deltoid átlói: $QP = \sqrt{2} \cdot x$; $AC = \sqrt{2}$.

Így a deltoid területe:

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot x \cdot \sqrt{2} = x. \qquad \text{1 pont}$$

Pitagorasz tételéből:

$$y = \sqrt{1^2 + (1-x)^2} = \sqrt{x^2 - 2x + 2}\,. \qquad \text{1 pont}$$

Így a sugárra felírt képlet alapján:

$$\frac{1}{6} = \frac{x}{x + \sqrt{x^2 - 2x + 2}}\,,$$

$$\begin{aligned} x + \sqrt{x^2 - 2x + 2} &= 6x, \\ \sqrt{x^2 - 2x + 2} &= 5x, \\ x^2 - 2x + 2 &= 25x^2, \\ 24x^2 + 2x - 2 &= 0, \\ x_1 = -\frac{1}{3}; \quad x_2 &= \frac{1}{4}. \end{aligned} \qquad \text{2 pont}$$

A negatív gyök nem tekinthető helyes megoldásnak, mivel x egy szakasz hossza, de a második gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

Tehát a négyszög területe $\frac{1}{4}$ területegység. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

* Ez a pont jár akkor is, ha a vizsgázó a függvénytáblázatban található képletre hivatkozik.