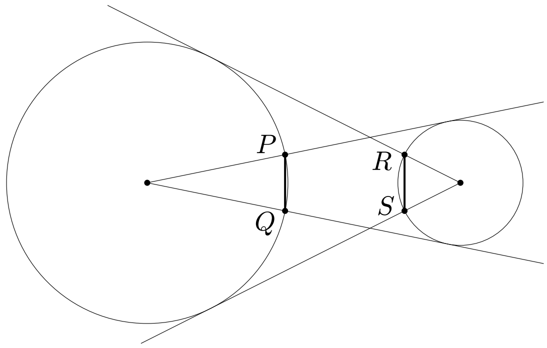
Bolyai János
Matematikai Társulat

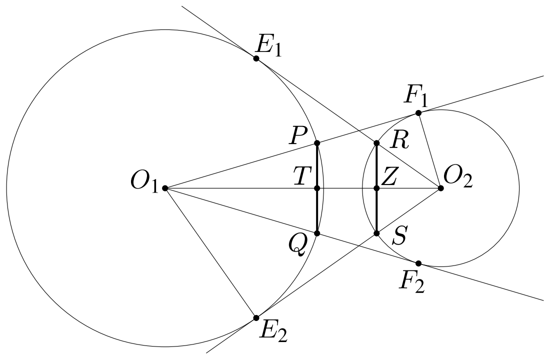
Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
3. (döntő) forduló
Haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Két, nem metsző kör középpontjaiból érintőket húzunk a másik körhöz (lásd ábra). P, Q és R, S azok a pontok, ahol ezek az érintők metszik a köröket. Bizonyítsuk be, hogy $PQ = RS$.



Megoldás. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit.



Legyen T és Z rendre az O_1 és O_2 szakasz PQ-val és RS-sel vett metszéspontja. PTO_1 háromszög hasonló az $O_2F_1O_1$ háromszöghöz, mert PO_1T szögük megegyezik, és $PTO_1\sphericalangle =$ $= O_2F_1O_1\sphericalangle = 90°$. 2 pont

Ezért felírható, hogy

$$\frac{PT}{PO_1} = \frac{F_1O_2}{O_1O2}.$$

$PO_1 = r_1$ és $F_1O_2 = r_2$ jelölést bevezetve

$$PT = \frac{r_1 r_2}{O_1O_2}. \qquad \text{1 pont}$$

Hasonlóan a ZSO_2 háromszög hasonló az $E_2O_1O_2$ háromszöghöz, mivel ZO_2S szögük megegyezik, és $SZO_2\sphericalangle = O_1E_2O_2\sphericalangle = 90°\sphericalangle$. 2 pont

Ezért felírható, hogy

$$\frac{ZS}{SO_2} = \frac{O_1E_2}{O_1O_2}.$$

A fenti jelöléssel ZS értéke:

$$ZS = \frac{r_2 r_1}{O_1O_2}. \qquad \text{1 pont}$$

Azaz $PT = ZS$.

Mivel az O_1O_2 szimmetriatengely felezi a PQ és RS szakaszokat, ezért $PQ = 2 \cdot PT$ és $RS = 2 \cdot ZS$. Így $PQ = RS$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy hatjegyű szám számjegyeinek szorzata 190 512.

a) Hány ilyen szám van?

b) Melyek ezek közül a négyzetszámok?

Megoldás. A szorzat prímtényezős felbontása: $190\,512 = 2^4 \cdot 3^5 \cdot 7^2$.

A felbontásból következik, hogy a keresett számban kell lenni két darab 7-es számjegynek, mert a 7 után következő, héttel osztható szám a 14, ami már nem lehet számjegy. Ekkor a maradék négy számjegy szorzatának prímtényezős felbontása: $2^4 \cdot 3^5$.

A maradék négy számjegy közül legalább egynek 9-esnek kell lenni, mert ha mindegyik csak hárommal osztható, de kilenccel nem, akkor a szorzatuk prímtényezős felbontásában a három, legfeljebb a negyedik kitevőn szerepelhetne. 1 pont

Ekkor a maradék három számjegy szorzatának prímtényezős felbontása: $2^4 \cdot 3^3$. Ez csak úgy lehetséges, ha az egyik számjegy újra a kilenc, vagy mindhárom számjegy osztható hárommal. De ekkor a 2^4 prímtényező miatt mindháromnak hatosnak kellene lenni, hiszen a 12 már nem számjegy, ekkor viszont a szorzatban a kettő csak a harmadik hatványon lenne. Ebből következően még egy kilences számjegy van.

Ekkor a maradék két számjegy szorzatának prímtényezős felbontása: $2^4 \cdot 3$. Ez csak úgy lehetséges, ha az egyik számjegy osztható hárommal, de kilenccel nem, így ez csak hat lehet.

Tehát a szám számjegyei: 6, 7, 7, 8, 9, 9 1 pont

Az ismétléses permutációk számának képlete szerint: $\dfrac{6!}{2! \cdot 2!} = 180$ darab ilyen szám van. 1 pont

Felírva a számjegyekből képezhető legnagyobb és legkisebb számot:

$$677\,899 \leqq N = n^2 \leqq 998\,776.$$

Ebből

$$824 \leqq n \leqq 999 \quad (824^2 = 678\,976 \text{ és } 999^2 = 998\,001).$$ 1 pont

Mivel N négyzetszám, ezért csak 6-ra, vagy 9-re végződhet, így n 4-re, 6-ra, 3-ra, vagy 7-re végződhet. Nézzük meg, mi lehet N utolsó két számjegye, n utolsó két számjegyétől függően:

n	04	14	24	34	44	54	64	74	89	94	06	16	26	36	46	56	66	76	86	96
N	16	96	76	56	36	16	96	76	56	36	36	56	76	96	16	36	56	76	96	16

n	03	13	23	33	43	53	63	73	83	93	07	17	27	37	47	57	67	77	87	97
N	09	69	29	89	49	09	69	29	89	49	49	89	29	69	09	49	89	29	69	09

A megjelölt lehetőségek alapján n lehetséges értékei:

824, 826, 833, 836, 837, 863, 864, 867, 874, 876, 883, 886, 887,
924, 926, 933, 936, 937, 963, 964, 967, 974, 976, 983, 986, 987. 1 pont

Az N szám számjegyeinek összege 46, ami 9-cel osztva egyet ad maradékul, ezért n 9-cel osztva 1-et, vagy 8-at ad maradékul.

Ennek alapján a következő lehetőségek maradnak:

836, 863, 883, 926, 937, 964. 1 pont

Ezek négyzete 698 896, 744 769, 779 689, 857 476, 877 969, 929 296.

Tehát a lehetséges megoldások: $779\,689 = 883^2$ és $877\,969 = 937^2$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. 2016 db pozitív szám mindegyike a további 2015 négyzetösszegével egyenlő. Mekkora lehet a legkisebb szám értéke?

1. megoldás. Jelölje a 2016 db számot $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$. Írjuk fel a feltételt az első két számra: $a_1 = a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2016}^2$ és $a_2 = a_1^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2016}^2$. Ezeket egymásból kivonva

$$a_1 - a_2 = a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2016}^2 - \left(a_1^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2016}^2\right) = a_2^2 - a_1^2$$

adódik. A jobb oldalt szorzattá alakítva azt kapjuk, hogy $a_1 - a_2 = (a_2 - a_1)(a_2 + a_1)$. 2 pont

Ha $a_1 \neq a_2$ lenne, akkor végigoszthatjuk az egyenletet $a_2 - a_1$-gyel, ekkor $-1 = a_2 + a_1$-et kapunk, ami lehetetlen, hisz a_1 és a_2 pozitív számok. 2 pont

Tehát $a_1 = a_2$. Ugyanezt a gondolatmenetet végigkövetve a 2016 szám közül bármely kettőre kiderül, hogy a feladat feltétele csak úgy teljesülhet, ha $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{2016}$. 1 pont

Ekkor tetszőleges $1 \leqq i \leqq 2016$-ra fennáll az $a_i = 2015a_i^2$ egyenlőség. 1 pont

Mivel $a_i \neq 0$, ezért mind a 2016 szám, így a legkisebb értéke is $\frac{1}{2015}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. Jelölje a 2016 db számot $a_1, a_2, \ldots, a_{2016}$, ezek négyzetösszegét pedig A.

Ekkor a feladat feltétele szerint

$$\begin{cases} a_1 = A - a_1^2, \\ a_2 = A - a_2^2, \\ \ldots \\ a_{2016} = A - a_{2016}^2, \end{cases}$$

vagyis minden $1 \leqq i \leqq 2016$ esetén $a_i = A - a_i^2$, azaz $a_i^2 + a_i = A$. 2 pont

Tekintsük az $f(x) = x^2 + x$ függvényt, ezzel az előző 2016 db egyenlet $f(a_i) = a_i^2 + a_i = A$ alakba írható. 1 pont

Mivel azonban az $f(x)$ függvény az $x \in]0; \infty]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, ezért az $f(x) = x^2 + x = A$ egyenletnek ezen a halmazon csak egy megoldása lehet, ezzel az értékkel kell egyenlőnek lennie minden a_i-nek, tehát $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{2016}$. 2 pont

Ekkor tetszőleges $1 \leqq i \leqq 2016$-ra fennáll az $a_i = 2015a_i^2$ egyenlőség. 1 pont

Mivel $a_i \neq 0$, ezért mind a 2016 szám, így a legkisebb értéke is $\frac{1}{2015}$. 1 pont

Összesen: 7 pont