Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
Kezdők I–II. kategória II. forduló
Kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Hat különböző prímszámot összeszoroztunk és a szorzat értéke egy $\overline{ababab}$ alakú hatjegyű szám lett. A hat darab prím közül az egyik a 29. Határozzuk meg az $\overline{ababab}$ szám értékét! (6 pont)

Megoldás.

$$\overline{ababab} = 10101 \cdot \overline{ab}, \qquad \text{(2 pont)}$$

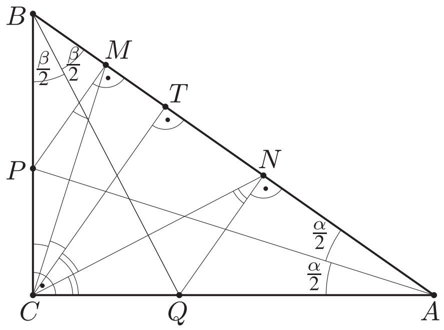
$$\overline{ababab} = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot \overline{ab}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ha $\overline{ab}$ egyik prímtényezője a 29, akkor a másik tényező csak a 2 lehet, hiszen egyrészt $5{\cdot}29$ már háromjegyű, másrészt mivel különböző prímeket szoroztunk össze, a másik tényező nem lehet a 3. (2 pont)

Így a válasz: $\overline{ababab} = 3 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 37 \cdot 2 \cdot 29 = 585\,858$. (1 pont)

2. Az ABC háromszög C csúcsánál levő szöge derékszög. A CAB és ABC szögek belső szögfelezői a szemközti oldalakat a P és Q pontokban metszik. A P és Q pontokból az AB oldalra állított merőlegesek talppontjai legyenek az M és N pontok. Határozzuk meg az MCN szög nagyságát! (6 pont)

Megoldás.



Mivel P rajta van a CAB szögfelezőjén, ezért $PC = PM$, (1 pont)
és a PCM egyenlőszárú háromszögben $PCM\sphericalangle = PMC\sphericalangle$. (1 pont)

Legyen T az ABC háromszög C csúcsához tartozó magasságának talppontja. Ekkor $PM \parallel CT$ és így $PMC\sphericalangle = MCT\sphericalangle$. Ezt és a korábbi megállapításunkat figyelembe véve $PCM\sphericalangle = MCT\sphericalangle$. (1 pont)

Hasonló gondolatmenettel látható be, hogy $QCN\sphericalangle = NCT\sphericalangle$. (1 pont)

Így

$$\begin{aligned} 90^\circ &= BCA\sphericalangle = PCM\sphericalangle + MCT\sphericalangle + NCT\sphericalangle + QCN\sphericalangle = \\ &= 2(MCT\sphericalangle + NCT\sphericalangle) = 2MCN\sphericalangle. \end{aligned} \qquad \text{(1 pont)}$$

amiből $MCN\sphericalangle = 45^\circ$ adódik. (1 pont)

3. Egy osztályba 6 fiú jár, és közülük az egyik az alábbi történetet mesélte el:

Decemberben mindnyájan feleltünk történelemből. Minden számon kérő órán volt egy vagy több felelő közülünk, de olyan is akadt, akit nem kérdezett a tanárnő. Viszont mindegyikünk hallhatta a másik 5 személy feleletét (nem feltétlenül együtt) azon történelem órák valamelyikén, amikor ő éppen nem került kiválasztásra.

Adjuk meg, hogy legalább hány történelem órán volt felelés december hónapban ebben az osztályban! (8 pont)

Megoldás. Először azt fogjuk belátni, hogy legfeljebb 3 számon kérő órával a feladat feltételei nem teljesíthetők. Jelöljük a fiúkat A, B, C, D, E, F-fel! Három vagy annál kevesebb számon kérő óra esetén, mivel a 6 fiú mindegyike felelt legalább egyszer, ezért kellett lennie olyan alkalomnak, amikor legalább két fiú került kiválasztásra. (1 pont)

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az ezen alkalommal beszámoló két személy A és B volt. Ezen számon kérő órán kívül kellett lennie még két olyan másiknak is, amikor A nem felelt és hallhatta B feleletét, illetve ennek fordítottjaként egy másik esetben B nem került kiválasztásra és ő hallhatta A beszámolóját. (1 pont)

Ez a 3 számon kérő óra azért nem elegendő a feladat összes feltételének teljesítéséhez, mert ahhoz, hogy A illetve B nem felelőként hallgathassa meg a C, D, E, F társak beszámolóját, ahhoz a 4 felsorolt személynek az előbb említett két számon kérő órán felelnie kellett volna. Viszont 3 számonkérés esetén azon az órán, amikor A ésB együtt felelt, már nem kerülhetett kiválasztásra a C, D, E, F személyek egyike sem, hiszen akkor lett volna olyan személy, aki minden számonkérésnél szerepelt volna. Így viszont C, D, E, F tanulók közül egyik sem hallhatta volna a másik 3 személy feleletét akkor, amikor ő mentesült a számonkérés alól. (3 pont)

4 számon kérő óra esetén a feladat feltételei már megvalósíthatók, például az alábbi csoportok feleltetésével: $\{A, B, C\}$, $\{A, D, E\}$, $\{B, D, F\}$, $\{C, E, F\}$. (3 pont)

4. Három réten tehenek legelnek, a rétek területének aránya 4:5:6. Az első, legkisebb réten 6 tehén 12 napig tud legelni, a másodikon 7 tehén 20 napig. A harmadik, legnagyobb réten hány napig tud legelni 12 tehén?

Mindhárom réten kezdetben egyforma magas volt a fű, a réteken egyforma gyorsan, egyenletesen nő a fű, és a tehenek megeszik mindazt a füvet, ami a réten volt, amikor odaérkeztek, és azt is, ami addig nőtt, amíg ott legeltek. (10 pont)

Megoldás. Legyen a rétek területe 4, 5, illetve 6 területegység. Nevezzük egy adagnak azt a fűmennyiséget, amit 1 tehén 1 nap alatt megeszik.

Jelöljük x-szel azt, hogy egy egységnyi területen hány adag fű található, (1 pont)
illetve y-nal azt, hogy az egységnyi területen 1 nap alatt hány adag fű nő. (1 pont)

A feladat szövege alapján az első 2 rétre felírható az alábbi 2 egyenlet:

$$4 \cdot (x + 12y) = 6 \cdot 12, \qquad \text{(1 pont)}$$

$$5 \cdot (x + 20y) = 7 \cdot 20. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ebből $y = 1{,}25$. (1 pont)
és $x = 3$. (1 pont)

Ha t-vel jelöljük, hogy a 12 tehén hány napig tud legelni a harmadik réten, akkor arra felírható az alábbi egyenlet:

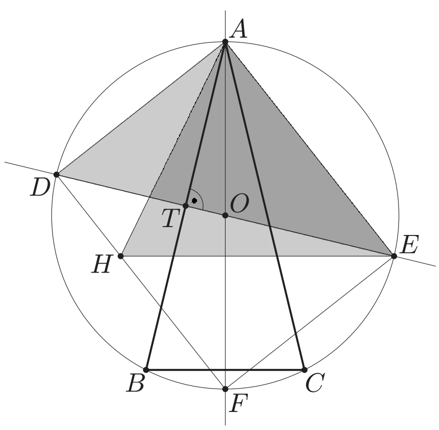
$$6 \cdot (3 + 1{,}25\,t) = 12\,t. \qquad \text{(2 pont)}$$

Ebből $t = 4$. (1 pont)

Vagyis 4 napig tud a legnagyobb réten 12 tehén legelni. (1 pont)

5. Az ABC egyenlőszárú háromszög AB szára a háromszög köré írt körének O középpontjától $\sqrt{19}$ egység távolságra van, a köré írt kör sugara 10 egység. A BC alap felezőmerőlegese a körülírt kört az F pontban metszi, az AB szár felezőmerőlegese és a körülírt kör metszéspontjai a D és E pontok (D a rövidebbik AB íven helyezkedik el). Az E-re illeszkedő BC-vel párhuzamos egyenes a DF szakaszt a H pontban metszi. Mennyi az AHE háromszög területe? (10 pont)

Megoldás.



Az $ADFE$ négyszög téglalap, mert átlói egyenlő hosszúak, és felezik egymást (vagy mivel a Thalész-tételt minden csúcsára és szemközti átlójára, mint átmérőre alkalmazhatjuk). (2 pont)

Az AHE háromszög területe ugyanakkora, mint az ADE háromszög területe, ugyanis az AE alapjuk azonos és az AE párhuzamos a DF-fel. Így ehhez az oldalhoz tartozó magasságuk egyenlő. (2 pont)

Jelöljük az AB szár felezéspontját T-vel. Az ADE területe kétszerese az ADO területének, mert AT magasságuk egybeesik, és DO és OE egyenlő hosszú, mivel mindkettő sugara a körnek. (2 pont)

Tehát

$$T_{AHE} = 2\,T_{ADO} = 2\frac{AT \cdot OD}{2}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Az ATO háromszög derékszögű, mert a T felezéspont talppontja az AB oldal felezőmerőlegesének. A Pithagorasz-tételt felírva az ATO háromszögre: (1 pont)

$$AT = \sqrt{100 - \left(\sqrt{19}\right)^2} = 9. \qquad \text{(1 pont)}$$

Tehát

$$T_{AHE} = 2\,T_{ADO} = 9 \cdot 10 = 90. \qquad \text{(1 pont)}$$