Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
3. (döntő) forduló
Haladók I. kategória

1. Az $ABCD$ konvex négyszöget az AC átlója két egyenlő területű háromszögre osztja. Az AC átlón felvett M (belső) ponton át az AB oldallal párhuzamosan húzott egyenes a BC oldalt a P pontban, az M ponton átmenő és a CD-vel párhuzamos egyenes az AD ol-dalt a Q pontban metszi. Hogyan kell az M pontot megválasztani, hogy az $MP\,C$ és az MQA háromszögek területeinek összege minimális legyen?

2. Felírtuk egy táblára a számokat 1-től 10-ig. Egy lépésben kiválasztunk kettőt, és elosztjuk őket egymással úgy, hogy a hányados legalább 1 legyen. A két kiválasztott számot letöröljük, és felírjuk helyette a hányados egészrészét. Legfeljebb mekkora lehet az utolsónak maradt szám?

3. Egy n pozitív egész szám esetén jelölje $f(n)$ azt a legkisebb pozitív egész k számot, amelyre igaz, hogy $k!$ osztható n-nel. Igazoljuk, hogy végtelen sok n esetén teljesül, hogy

$$\frac{f(n)}{f(n+1)} > 1{,}99!$$