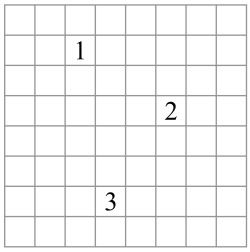
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
3. (döntő) forduló
Kezdők II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy 8×8-as négyzetrács (tábla) 1×1-es négyzeteibe (mezőibe) az $1, 2, \ldots, k$ ($k \leqq 64$) számokat írjuk valamilyen elrendezésben. Az $\{1, 2, \ldots, k\}$ mezőket együttesen útvonalnak nevezzük. Az útvonal teljes, ha $k = 64$, tehát az összes mező ki van töltve. Egy zebra lépked a tábla mezőin a következőképpen:

Tegyük fel, hogy a zebra az A mezőn áll. A fel, le, balra, jobbra irányok valamelyikében 2 mezőnyi távolságra mozdulva a táblán a zebra az A mezőből a B mezőbe érkezik, majd az első irányra merőlegesen a B-ből 3 mezőnyi távolságra elmozdulva a táblán a C mezőbe érkezik. Ekkor az A-ból C-be lépés a zebra egy szabályos lépése. Például az ábrán látható 1-es mezőből a 2-es mezőbe lépés egy szabályos zebra-lépés, a 2-es mezőből a 3-as mezőbe lépés egy újabb szabályos zebra-lépés.

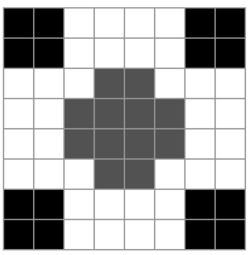


Azt mondjuk, hogy az $\{1, 2, \ldots, k\}$ útvonal zebra-útvonal, ha a zebra az 1-es számú mezőből a 2-es számú mezőbe tud lépni szabályos zebra-lépéssel, az i-edik mezőből az $i + 1$-edikbe tud lépni szabályos zebra-lépéssel minden $1 \leqq i \leqq k - 1$-re.

Létezik-e a 8×8-as táblán teljes zebra-útvonal?

Megoldás. Nem létezik teljes zebra-útvonal. 1 pont

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy létezik teljes zebra-útvonal, és rögzítsünk egy ilyet 1 pont



Színezzük ki a táblát az ábrán látható módon fekete, fehér, és szürke színekkel 1 pont

A zebra fekete színű mezőről csak szürke színű mezőre tud lépni, és fekete színű mezőre csak szürke színű mezőről tud lépni. 1 pont

Mivel az útvonal teljes, ezért az összes négyzetet érintenie kell a zebrának. 1 pont

Képezzünk egy gráfot az útvonalból az alábbi módon: Legyenek az $1, 2, \ldots, 64$ mezők a pontok, és kössük össze az útvonal egymást követő mezőinek megfelelő pontokat egy éllel. Tehát az élek az $i - (i + 1)$ mezők között haladnak minden $1 \leqq i \leqq 63$-ra. Színezzük ki a gráf pontjait a nekik megfelelő mező színével. A gráf minden pontjának kettő a foka, kivéve a két végpontot, ezeknek 1 a foka. 1 pont

Mivel 16 fekete mező van, ezért a fekete pontok halmazából összesen legalább $14 \cdot 2 + 2 \cdot 1 = 30$ él halad ki. 2 pont

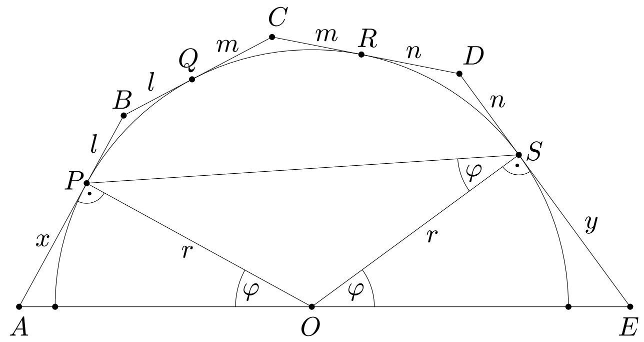
Mivel 12 szürke mező van, ezért a szürke pontok halmazába összesen legfeljebb $12 \cdot 2 = 24$ él haladhat be. 1 pont

Mivel a fekete pontokból csak a szürke pontok felé halad él, és $24 < 30$, ezért ellentmondáshoz jutottunk. 1 pont

Tehát feltevésünk nem volt igaz, vagyis nem létezik teljes zebra-útvonal.

2. Legyen az $ABCDE$ olyan konvex ötszög, melynek oldalaira teljesül, hogy $AB + CD = BC + DE$, és az ötszöghöz található olyan k kör, melynek középpontja az AE oldalon van, és a kör az AB, BC, CD és DE oldalakat a P, Q, R, S pontokban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az AE és PS egyenesek párhuzamosak.

Megoldás.



Helyes ábra: 1 pont

Használjuk fel, hogy egy pontból adott körhöz húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúságúak. Ez alapján:

$$BP = BQ = l,$$
$$CQ = CR = m,$$
$$DR = DS = n.$$

1 pont

Bevezetve az $AP = x$, $ES = y$ jelöléseket, az $AB + CD = BC + DE$ egyenlőséget az érintőszakaszok segítségével felírva: $x + l + m + n = l + m + n + y$, amiből $x = y$, azaz $AP = ES$. 2 pont

Jelöljük a k kör középpontját O-val. Mivel az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért $OPA\sphericalangle = OSE\sphericalangle = 90°$. 1 pont

Továbbá $OP = OS = r$ miatt $OPA\triangle \cong OSE\triangle$, mivel két-két oldaluk és a nagyobbikkal szemközti szögük azonos. 1 pont

Ezt felhasználva: $AOP\sphericalangle = EOS\sphericalangle = \varphi$ és $POS\sphericalangle = 180° - 2\varphi$. 2 pont

Az OSP egyenlőszárú háromszögben

$$OSP\sphericalangle = \frac{180° - POS\sphericalangle}{2} = \varphi, \quad SOE\sphericalangle = OSP\sphericalangle = \varphi.$$

1 pont

Így az említett szögek váltószögek, szögszáraik párhuzamosak, ami éppen azt jelenti, hogy az AE és PS egyenesek párhuzamosak. 1 pont

3. Legyen $a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2017}$, ahol $1 \leqq n \leqq 2017$, $n \in \mathbb{N}^+$.

Számítsuk ki az $a_1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2017}^2$ összeg pontos értékét.

Megoldás. Egy többtagú összeg négyzete egyenlő: a tagok négyzeteinek összege + + az összes lehetséges kéttényezős szorzatok kétszereseinek az összege.

Elvégezzük a négyzetre emeléseket, majd először a négyzetes tagokat, utána pedig a kétszeres szorzatokat számoljuk össze.

A négyzetes tagok összege:

Az $\frac{1}{k^2}$-es tag k-szor fog szerepelni (a_1-től a_k-ig vett tagok négyzetében), így ezek összege $\frac{1}{k^2} \cdot k = \frac{1}{k}$. 2 pont

Ezeknek az összege az összes k-ra 1-től 2017-ig $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2017} = a_1$. 1 pont

A kétszeres szorzatok összege:

Legyen $i < j$. Ekkor a $2 \cdot \frac{1}{ij}$ azokban az a_k^2-ekben fordul elő, ahol $k \leqq i$, így ezeknek az összege $i \cdot 2 \cdot \frac{1}{ij} = \frac{2}{j}$. Adott j-hez $j - 1$ darab olyan i van, amelyre $i < j$, ezért a rögzített j-hez tartozó lehetséges $\frac{2}{ij}$ alakú számok összege $(j-1) \cdot \frac{2}{j} = 2 - \frac{2}{j}$. 4 pont

Ha az összes j-re kiszámítjuk az összeget, akkor a következőt kapjuk:

$$\left(2 - \frac{2}{1}\right) + \left(2 - \frac{2}{2}\right) + \left(2 - \frac{2}{3}\right) + \ldots + \left(2 - \frac{2}{2017}\right) =$$

$$= 2 \cdot 2017 - 2 \cdot \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2017}\right) = 4034 - 2a_1.$$ 2 pont

Ezért $a_1 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \ldots + a_{2017}^2 = a_1 + a_1 + 4034 - 2a_1 = 4034$. 1 pont