Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2017/2018-as tanév
2. forduló
Haladók I. kategória

Feladatok

1. 2 018 000 Ft-ot szeretnénk 1000, 2000, és 5000 Ft-os papírpénzek felhasználásával kifizetni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg, ha mindegyik pénzből elegendően sok van a pénztárcánkban? **7 pont**

2. Adott egy egyenlő szárú háromszög, továbbá egy olyan kör, amelynek középpontja rajta van a háromszög egyik szárán, és érinti a háromszög alapját. A körre illeszkedik a háromszög alappal szemközti csúcsa és a súlypontja is. Határozzuk meg a háromszög szögeit! **7 pont**

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenlőtlenséget!

$$x^2 \le \{x + 2018\} \cdot (2[x] + \{x\})$$

(Az $[a]$ kifejezés az a szám egészrészét adja meg, amely definíció szerint az a számnál nem nagyobb legnagyobb egész számot jelenti. Az $\{a\}$ szám az a szám törtrészét határozza meg, amelyet úgy kaphatunk meg, hogy az a valós számból kivonjuk ez egészrészét.) **7 pont**

4. Tekintsük azt a legbővebb halmazt, amelynek az elemei olyan pozitív egész számok, amelyek prímtényezős felbontásában csak az első 2018 darab prímszám közül fordulhatnak elő prímszámok, és mindegyik előforduló prím az első hatványon szerepel. Igazoljuk, hogy ennek a halmaznak megadható 2^{2017} elemű részhalmaza úgy, hogy a részhalmazból bármely két elemnek 1-nél nagyobb a legnagyobb közös osztója, de $\left(2^{2017} + 1\right)$-elemű ilyen tulajdonságú részhalmaza már nincs! **7 pont**