Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Tegyük fel, hogy egy valós számnak és reciprokának négyzetösszege kettővel kisebb egy négyzetszámnál. Bizonyítsuk be, hogy a szám tetszőleges páratlanadik hatványához hozzáadva reciprokának ugyanezen hatványát, egész számot kapunk! **10 pont**

2. Legyen az ABC háromszög körülírt köre k! Jelöljük a k kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontját D-vel, B-t nem tartalmazó CA ívének felezőpontját E-vel és C-t nem tartalmazó AB ívének felezőpontját F-fel! ABC háromszög beírt köre érintse a BC, CA és AB oldalakat rendre a K, L, M pontokban! Bizonyítsuk be, hogy DK, EL és FM egyenesek egy pontban metszik egymást! **10 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy létezik $N > 1$ egész szám a következő tulajdonsággal: minden $n > N$ egész szám felbontható olyan pozitív egészek összegére, amelyeknek legkisebb közös többszöröse nagyobb, mint n^{2018}. **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Tegyük fel, hogy egy valós számnak és reciprokának négyzetösszege kettővel kisebb egy négyzetszámnál. Bizonyítsuk be, hogy a szám tetszőleges páratlanadik hatványához hozzáadva reciprokának ugyanezen hatványát, egész számot kapunk! **10 pont**

Megoldás: A belátandó állítás:

Ha $x^2 + \frac{1}{x^2} = l^2 - 2$ valamely nullától különböző x esetén, akkor $x^{2k+1} + \frac{1}{x^{2k+1}}$ egész. 1 pont

Vegyük észre, hogy $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2$, amiből a feltételt felhasználva következik, hogy $x + \frac{1}{x}$ egész. 2 pont

Továbbá tudjuk, hogy

$$x^{2k+1}+\frac{1}{x^{2k+1}}=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^{2k}-x^{2k-1}+\ldots-1+\ldots-\frac{1}{x^{2k-1}}+\frac{1}{x^{2k}}\right)$$ 3 pont

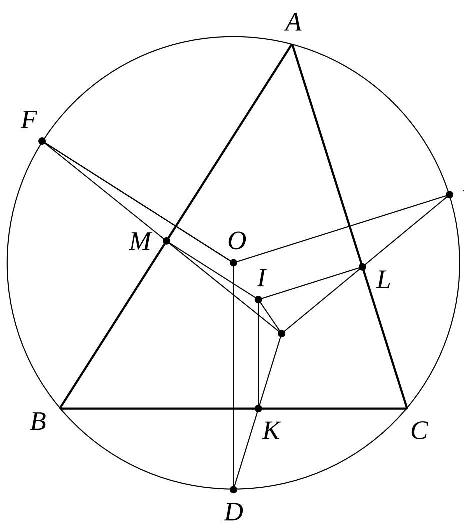
A második zárójel szimmetrikus összegének tagjait megfelelően párosítva és két tag összegének négyzeteként felírva egészek összegét kapjuk a második zárójelben is. 3 pont

Így egészek szorzataként állítottuk elő a kívánt összeget. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Legyen az ABC háromszög körülírt köre k! Jelöljük a k kör A-t nem tartalmazó BC ívének felezőpontját D-vel, B-t nem tartalmazó CA ívének felezőpontját E-vel és C-t nem tartalmazó AB ívének felezőpontját F-fel! ABC háromszög beírt köre érintse a BC, CA és AB oldalakat rendre a K, L, M pontokban! Bizonyítsuk be, hogy DK, EL és FM egyenesek egy pontban metszik egymást! **10 pont**

1. megoldás: Jelöljük a körülírt kör középpontját O-val, a beírt kör középpontját pedig I-vel!



Az F-ben és E-ben húzott körérintők metszéspontját jelöle A', az F-ben és D-ben húzott körérintők metszéspontját B', az E-ben és D-ben húzott körérintők metszéspontját C'.

Az $A'B'C'$ háromszög beírt köre éppen az ABC körülírt köre. Mivel $A'B' \perp FO$ (a kör érintője merőleges az érintési pontba futó sugárra) és $AB \perp FO$ (szimmetria miatt a kör kerületén felvett két pont által meghatározott körív felezőpontját a kör középpontjával összekötő sugár merőlegesen felezi a két pont között húzott húrt), $A'B' \parallel AB$; hasonlóan $B'C' \parallel BC$; valamint $C'A' \parallel CA$. Mivel megfelelő oldalaik párhuzamosak, így a szögeik egyenlők, vagyis $ABC\triangle \sim A'B'C'\triangle$. 3 pont

$A'A$ és $B'B$ metszéspontját jelölje X. Belátjuk, hogy $C'C$ is átmegy X-en, amiből már következik, hogy az X középpontú, A-t A'-be, B-t B'-be vivő hasonlóság az ABC háromszöget (és annak minden pontját) az $A'B'C'$ háromszögbe (a pontot az annak megfelelő pontba) viszi. 1 pont

XA és XA' egy egyenesbe esik, $AC \parallel A'C'$, így XAC és $XA'C'$ párhuzamos szárú szögek, vagyis egyenlőek. A hasonlóság szögtartó, X képe X, A képe A', ezért az A-ból induló, XA-val XAC szöget bezáró félegyenes képe az A'-ből induló, XA'-vel $XAC = XA'C'$ szöget bezáró félegyenes. Erre illeszkedik C'. 2 pont

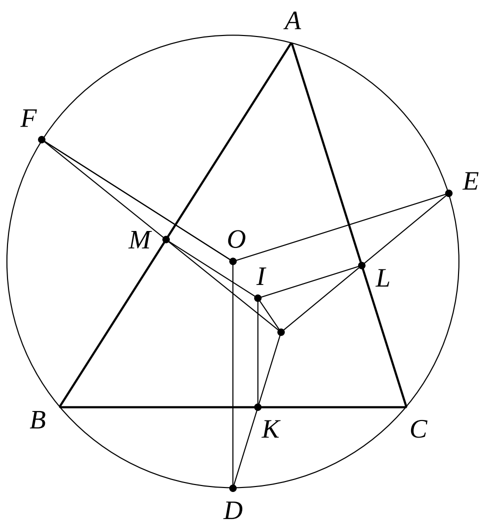
Hasonlóan, a B-ből induló, XB-vel XBC szöget bezáró félegyenes képe a B'-ből induló, XB'-vel $XBC = XB'C'$ szöget bezáró félegyenes, amelyre szintén illeszkedik C'. A hasonlóság illeszkedéstartó, így az AC és BC félegyenesek C metszéspontjának képe a megfelelő félegyenesek képének metszéspontja, C'. 2 pont

Mivel az X középpontú hasonlóság ABC-t $A'B'C'$-be viszi, az ABC háromszög minden pontját a neki megfelelő $A'B'C'$-beli pontba viszi. 1 pont

Esetünkben megfelelő pontpárok például a beírt kör oldalakkal vett érintési pontja is. Az ezeket összekötő egyenesek átmennek a hasonlóság középpontján, vagyis FM, DK és EL egy ponton, X-en mennek át. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás: Jelöljük a körülírt kör középpontját O-val, a beírt kör középpontját pedig I-vel! A körülírt kör sugarát jelölje ϱ, a beírt körét r.



$FO \perp AB$ (szimmetria miatt a kör kerületén felvett két pont által meghatározott körív felezőpontját a kör középpontjával összekötő sugár merőlegesen felezi a két pont között húzott húrt), $MI \perp AB$ (a beírt kör érintési pontja), azaz $FO \parallel MI$, hasonlóan $EO \parallel IL$, továbbá $FO = OE = \varrho$, $MI = IL = r$. $FOE\sphericalangle = MIL\sphericalangle$, mert párhuzamos szárú, ugyanolyan állású (körüljárású) szögek; mind az $FOE\triangle$, mind az $MIL\triangle$ egyenlő szárú, ugyanakkora a szárszögük, tehát a két háromszög hasonló (a hasonlóság egyik alapesete: két oldal aránya és a közbezárt szög), azaz a harmadik oldalpárjuk is párhuzamos. 3 pont

Ugyanígy teljesül, hogy $DOE\triangle \sim KIL\triangle$ és $DE \parallel KL$, illetve $FOD\triangle \sim MIK$ és $FD \parallel MK$. 2 pont

Mivel megfelelő oldalpárjaik párhuzamosak, $KLM\triangle \sim DEF\triangle$. 1 pont

Legyen DK és FM egyenesének metszéspontja X. Ekkor (párhuzamos oldalpárjaik miatt) $XKM\triangle \sim XDF\triangle$, és a hasonlóság középpontja X. Tekintsük ezt a hasonlóságot. 1 pont

Megmutatjuk, hogy az L pontot E-be viszi, amiből már következik, hogy X illeszkedik EL-re is.

Ehhez felhasználjuk, hogy a hasonlóság szögtartó.

$XKL\sphericalangle = XDE\sphericalangle$, $XML\sphericalangle = XFE\sphericalangle$, mert párhuzamos szárú azonos állású (körüljárású) szögpárok. Eszerint ha a hasonlóság során K képe D, akkor a K kezdőpontú, vele XKL szöget bezáró félegyenes képe a D kezdőpontú, XD-vel ugyanekkora (XDE) szöget bezáró félegyenes; illetve az M kezdőpontú, XM-mel XML szöget bezáró félegyenes képe az F kezdőpontú, XE-vel ugyanekkora (XFE) szöget bezáró félegyenes: KL félegyenes képe DE félegyenes, ML félegyenes képe pedig FE félegyenes. 2 pont

Mivel pedig (fél)egyenesek metszéspontjának képe a (fél)egyenesek képének metszéspontja, a hasonlóság az L-et az E-be viszi. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. megoldás: Jelölje a beírt kört b. Bármely két kör hasonló, így b és k is. 1 pont

Tekintsük azt a h hasonlóságot, amely b-t k-ba viszi. Legyen a hasonlóság középpontja X. 1 pont

Legyen a K, L, M pontok h szerinti képe rendre K', L', M'. Mivel b kör pontjainak képe k körre illeszkedik, K', L', M' illeszkedik k-ra. 1 pont

Szerkesszünk érintőt k-hoz a kapott pontokban.

Legyen a három érintő által közrezárt háromszög $A'B'C'$ (megfelelően az A, B, C pontoknak). 1 pont

Mivel az $A'B'C'$ és az ABC háromszög beírt körei érintési pontjai a h hasonlóság szerint egymásnak megfelelő pontpárok, ezért az ABC háromszög h szerinti képe éppen az $A'B'C'$ háromszög. 2 pont

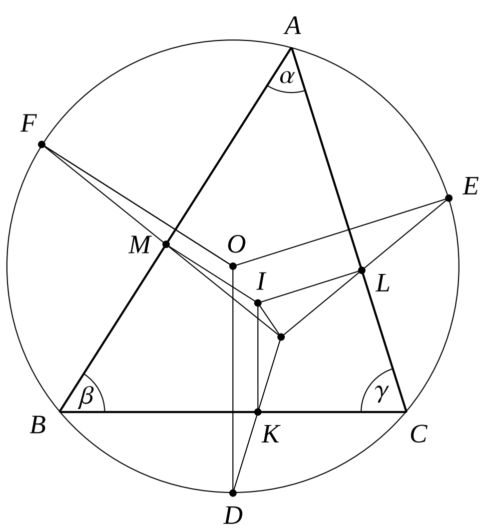
A hasonlóság során egyenes képe vele párhuzamos egyenes, ezért $AB \parallel A'B'$, $BC \parallel B'C'$, $AC \parallel A'C$. 1 pont

Mivel $M'O \perp A'B'$, azaz $A'B' \parallel AB$ miatt $M'O \perp AB$, továbbá $M'O$ a k egy sugara, ez csak úgy lehet, ha $M'O$ az AB szakaszfelező merőlegese (ha egy sugár merőleges egy húrra, akkor azt a szimmetria miatt felezi), ami azt jelenti, hogy az M' pont felezi az AB húrhoz tartozó íve(ke)t is, vagyis M' egybeesik F-fel. Ugyanígy, L' egybeesik E-vel, K' egybeesik D-vel. 2 pont

Mivel pedig $M'M$, $K'K$ és $L'L$ egyenesei egy pontban, az X-ben metszik egymást, így FM, EK, DK egyenesei egy ponton mennek át. 1 pont

Összesen: **10 pont**

4. megoldás: Jelöljük a körülírt kör középpontját O-val, a beírt kör középpontját pedig I-vel! Az ABC háromszög A, B és C csúcsánál lévő szögeket jelölje rendre α, β, γ! Az OFE háromszög egyenlő szárú, és $OF \perp AB$ valamint $OE \perp CA$ miatt $EOF\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$. 1 pont



Hasonlóan, az IML háromszög is egyenlő szárú, és $IM \perp AB$, valamint $IL \perp CA$ miatt $LIM\sphericalangle = 180^\circ - \alpha$. 1 pont

Tehát $OEF\triangle \sim IML\triangle$, így $\dfrac{OF}{IM} = \dfrac{OE}{IL} = \lambda$. 2 pont

Ugyanígy megmutatható, hogy $ODE\triangle \sim IKL\triangle$, ezért $\dfrac{OE}{IL} = \dfrac{OD}{IK} = \lambda$. 2 pont

Legyen $DK \cap OI = P$, $EL \cap OI = Q$, $FM \cap OI = R$!

$OD \parallel IK$, így a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt $\dfrac{PO}{PI} = \lambda$.

Hasonlóan látható, hogy $\dfrac{RO}{RI}$ és $\dfrac{QO}{QI}$ értéke szintén λ. 2 pont

Tehát $P = Q = R$, és ez a pont rajta van a DK, EL és FM egyenesek mindegyikén. 2 pont

Összesen: **10 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy létezik $N > 1$ egész szám a következő tulajdonsággal: minden $n > N$ egész szám felbontható olyan pozitív egészek összegére, amelyeknek legkisebb közös többszöröse nagyobb, mint n^{2018}. **10 pont**

Megoldás: Az állítást általánosabban, a 2018 helyére tetszőleges k pozitív egész számot írva bizonyítjuk be. **(Általánosítás: 0 pont, mivel tetszőleges kitevőre a bizonyítás hasonló elveken alapul.)**

Legyen $p_1(=2) < p_2(=3) < p_3(=5) < \ldots < p_{k+1}$ az első $k+1$ prímszám (mivel végtelen sok prímszám van, ezeket minden k-ra megválaszthatjuk), és bebizonyítjuk, hogy

$$N = 2^{k+1} p_1^{k+1} p_2^k \ldots p_k^2 p_{k+1}$$

megfelel. A későbbiekhez jegyezzük fel, hogy ez maga után vonja azt, hogy

$$N > 2p_1p_2\ldots p_kp_{k+1}.$$

(Megfelelő korlát megadása: 2 pont, más gondolatmenetek más korlátokhoz vezethetnek. A 2 pont akkor is jár, ha a tanuló explicite nem számol ki korlátot, de a levezetéséből világos, hogy ilyen korlát létezik. Ez befejező lépés is lehet.)

Legyen $n > N$ rögzített. Az alábbiakban előállítjuk n egy pozitív egészek összegére történő felbontását, majd megmutatjuk, hogy az előálló legkisebb közös többszörös nagyobb, mint n^k.

Legyen a_1 az a legnagyobb 2-hatvány, amely nem nagyobb $\frac{n}{2}$-nél (ekkor a_1 nagyobb, mint $\frac{n}{4}$), a_2 az a legnagyobb 3-hatvány, amely nem nagyobb $\frac{n}{4}$-nél (ekkor a_2 nagyobb, mint $\frac{n}{12}$), és általában, minden $k+1$-nél nem nagyobb j pozitív egészre legyen a_j az a legnagyobb hatványa p_j-nek, amely nem nagyobb $\frac{n}{2p_1\ldots p_{j-1}}$-nél (ekkor a_j nagyobb, mint $\frac{n}{2p_1\ldots p_j}$).

Állítjuk, hogy az így kapott $a_1, \ldots, a_{k+1}$ számok összege kisebb, mint n. Valóban, kihasználva, hogy minden szóban forgó prím legalább 2, az összegük legfeljebb

$$\frac{n}{2} + \frac{n}{2p_1} + \frac{n}{2p_1p_2} + \ldots + \frac{n}{2p_1\ldots p_k} < n\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^{k+2}}\right) < n$$

a mértani sorozat tagjainak összegzéséből.

Vegyük tehát n-nek a következő felbontását:

$$n = a_1 + \ldots + a_{k+1} + 1 + \ldots + 1,$$

annyi 1-essel kiegészítve, amennyi kell.

(A korláthoz tartozó felbontás kidolgozása: 5 pont.)

Mivel $a_1, \ldots, a_{k+1}$ különböző prímhatványok, a legkisebb közös többszörösük a szorzatuk, ami tehát így

$$a_1 \ldots a_{k+1} > \left(\frac{n}{2p_1}\right) \cdot \left(\frac{n}{2p_1p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{n}{2p_1\ldots p_{k+1}}\right) = \frac{n^{k+1}}{N} > n^k,$$

ezzel a bizonyítás kész.

(Annak igazolása, hogy a megadott felbontás elég nagy legkisebb közös többszöröst ad: 3 pont.)

Összesen: **10 pont**