Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

1. Adjuk meg azokat a természetes számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyekre fennáll az

$$(xy - 7)^2 = x^2 + y^2$$

egyenlőség. **7 pont**

2. Egy paralelogramma oldalainak hossza 3 cm és 4 cm. Az átlók összege centiméterben mérve egész szám. Mekkora lehet az átlók különbségének abszolút értéke? **7 pont**

3. 2019^2 darab követ szeretnénk elszállítani a bányából. A kövek tömegei számtani sorozatot alkotnak. Igazoljuk, hogy a kövek elszállíthatók 2019 teherautóval! (Az autók teherbírása egyenlő, a teherbírások összege egyenlő a kövek össztömegével. Az autókat nem szabad túlterhelni, a köveket nem szabad darabokra törni.) **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Adjuk meg azokat a természetes számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyekre fennáll az

$$(xy-7)^2 = x^2 + y^2$$

egyenlőség. **7 pont**

Megoldás. Az egyenletet átalakítva:

$$x^2y^2 - 14xy + 49 = x^2 + y^2$$

$$x^2y^2 - 12xy + 49 = x^2 + y^2 + 2xy \qquad \text{1 pont}$$

$$(xy-6)^2 + 13 = (x+y)^2$$

$$(xy-6)^2 - (x+y)^2 = -13 \qquad \text{1 pont}$$

Az egyenlet bal oldalát szorzattá alakítva: $(xy - 6 - (x + y))(xy - 6 + (x + y)) = -13$.

Mivel a megadott alaphalmazon (x, y természetes számok) a bal oldalon szereplő tényezők értéke egész szám, a 13 pedig prímszám, ezért két eset valósulhat meg: $-13 = (-1) \cdot 13$ vagy $-13 = (-13) \cdot 1$. 1 pont

1. eset:

$$\begin{cases} xy - 6 - (x+y) = -1 \\ xy - 6 + (x+y) = 13. \end{cases} \quad \text{Ebből} \quad \begin{cases} xy - (x+y) = 5 \\ xy + (x+y) = 19. \end{cases}$$

A kapott egyenletrendszert xy-ra, illetve $x + y$-ra megoldva: $\begin{cases} xy = 12 \\ x + y = 7 \end{cases}$ 1 pont

adódik, amiből az $x_1 = 3$, $y_1 = 4$, illetve $x_2 = 4$, $y_2 = 3$ megoldások adódnak. 1 pont

2. eset:

$$\begin{cases} xy - 6 - (x+y) = -13 \\ xy - 6 + (x+y) = 1. \end{cases} \quad \text{Ebből} \quad \begin{cases} xy - (x+y) = -7 \\ xy + (x+y) = 7. \end{cases}$$

A kapott egyenletrendszert xy-ra, illetve $x + y$-ra megoldva: $\begin{cases} xy = 0 \\ x + y = 7 \end{cases}$ 1 pont

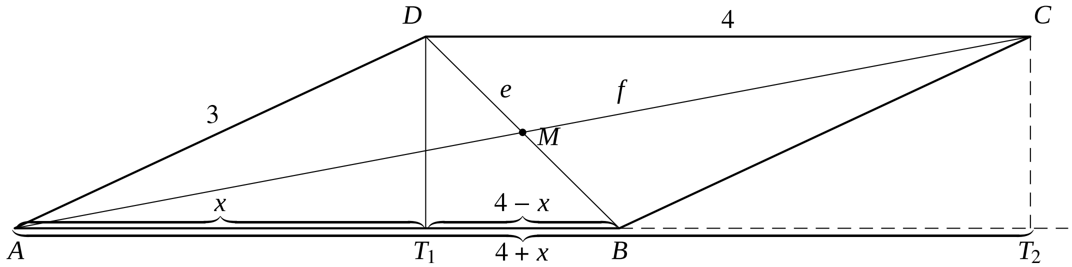
adódik, amiből az $x_1 = 0$, $y_1 = 7$, illetve $x_2 = 7$, $y_2 = 0$ megoldások adódnak. 1 pont

Tehát az egyenletrendszer megoldásai: $(3; 4)$, $(4; 3)$, $(0; 7)$, $(7; 0)$

Összesen: **7 pont**

2. Egy paralelogramma oldalainak hossza 3 cm és 4 cm. Az átlók összege centiméterben mérve egész szám. Mekkora lehet az átlók különbségének abszolút értéke? **7 pont**

Megoldás.



Rajzoljunk be két magasságot, és használjuk az ábra jelöléseit!

Pitagorasz-tételt felírva AT_2C, AT_1D és BT_1D háromszögekben kapjuk, hogy:

$$e^2 - (4-x)^2 = 3^2 - x^2$$
$$f^2 - (4+x)^2 = 3^2 - x^2$$
1 pont

Ebből: $e^2 + f^2 = 50$. 1 pont

A számtani és a négyzetes közép közti egyenlőtlenségből:

$$\frac{e+f}{2} \leqslant \sqrt{\frac{e^2+f^2}{2}} = 5, \qquad \text{így} \qquad e+f \leqslant 10.$$
1 pont

Felírjuk a háromszög-egyenlőtlenséget ABM háromszögben, ebből $8 < e + f$. 1 pont

Így két lehetőség van:

1. $e + f = 10$, ekkor a számtani és a négyzetes közép között egyenlőség van, ami pontosan akkor teljesül, ha $e = f = 5$, tehát a paralelogramma téglalap, a különbség nulla. 1 pont

2. $e + f = 9$ és tudjuk, hogy $e^2 + f^2 = 50$, tehát egy szimmetrikus másodfokú egyenletrendszert kell megoldanunk. 1 pont

Ebből a $2e^2 - 18e + 31 = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk, ahol a gyökök különbségének abszolút értéke:

$$\frac{18+\sqrt{76}}{4} - \frac{18-\sqrt{76}}{4} = \frac{\sqrt{76}}{2} = \sqrt{19}.$$
1 pont*

Összesen: **7 pont**

* A *-gal jelölt 1 pont akkor is jár, ha a versenyző az ismert (diszkriminláns négyzetgyöke osztva a főegyütthatóval) képletet használja.

3. 2019^2 darab követ szeretnénk elszállítani a bányából. A kövek tömegei számtani sorozatot alkotnak. Igazoljuk, hogy a kövek elszállíthatók 2019 teherautóval! (Az autók teherbírása egyenlő, a teherbírások összege egyenlő a kövek össztömegével. Az autókat nem szabad túlterhelni, a köveket nem szabad darabokra törni.) **7 pont**

Megoldás. A tömegeket jelöljük $a_1, a_2, \ldots, a_{2019^2}$-nel.

A tömegeket rendezzük el egy 2019×2019-es táblázatban legkisebbtől a legnagyobbig, a bal felső sarokból indulva a sorokban balról jobbra, majd az alatta levő sorban is balról jobbra. 1 pont

a_1	a_2	a_3			a_{2019}
a_{2020}	a_{2021}	a_{2022}			a_{4038}
a_{4039}	a_{4040}	a_{4041}			a_{6057}
					e
f					b
c	g			h	a_{2019^2}

2019 darab csoportot kell létrehozni. Ha minden csoport minden sorból és minden oszlopból pontosan egy követ tartalmaz, akkor a kövek tömegei számtani sorozatot alkotnak, vagyis tömegük szerint sorba téve őket, az egymás melletti kövek tömegének különbsége ugyanakkora. Tehát minden autóra $S + d + 2d + 3d + \ldots + 2018d$ tömegű rakomány kerül, ahol d a számtani sorozat differenciája, S pedig az első oszlopban levő elemek összege. 3 pont

Az első csoport álljon főátlóbeli elemekből, 1 pont

a második csoport a főátló feletti átló a_2-től b-ig, valamint c,

a harmadik csoport a főátló felett a második átló a_3-tól e-ig, valamint f és g,. . .

az utolsó csoport a_{2019}-ből és a főátló alatti átlóból a_{2020}-tól h-ig.

Így mindegyik csoportban szerepel minden sorból és minden oszlopból pontosan egy elem, vagyis a csoportbeli elemek összege minden csoportnál megegyezik. Egy csoport legyen egy teherautó rakománya, így valóban el lehet szállítani 2019 teherautóval az összes követ. 2 pont

Összesen: **7 pont**