Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2018/2019-es tanév

1. forduló

Kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy trapézról tudjuk, hogy az egyik belső szöge derékszög és két külső szögének aránya $4 : 5$. Mekkora lehet a trapéz legkisebb belső szöge? **6 pont**

Megoldás. Ha a trapéz egyik szöge derékszög, akkor a trapéz szára mentén mellette lévő szög is derékszög (mivel a trapéz alapjai párhuzamosak). (A trapéz összes belső szöge nem lehet derékszög.)

Három eset van, attól függően, hogy melyik két belső szöghöz tartozó külső szögek aránya $4 : 5$.

1. eset: egy derékszög és egy nem derékszög melletti külső szögek aránya $4 : 5$. 1 pont

A(z egyik) derékszög melletti külső szög $90°$, tehát a másik külső szög $(90° : 4) \cdot 5 = 112{,}5°$. Az ehhez tartozó belső szög $67{,}5°$.

Mivel a trapéz egy szárán lévő belső szögek összege $180°$, ezért a trapéz negyedik szöge $112{,}5°$. (A trapéz szögei: $90°$; $90°$; $112{,}5°$ és $67{,}5°$), tehát a legkisebb szög ekkor $67{,}5°$. 1 pont

2. eset: egy derékszög és egy nem derékszög melletti külső szögek aránya $5 : 4$. 1 pont

A(z egyik) derékszög melletti külső szög $90°$, tehát a másik külső szög $(90° : 5) \cdot 4 = 72°$. Az ehhez tartozó belső szög $108°$.

Mivel a trapéz egy szárán lévő belső szögek összege $180°$, ezért a trapéz negyedik szöge $72°$. (A trapéz szögei: $90°$; $90°$; $108°$ és $72°$), tehát a legkisebb szög ekkor $72°$. 1 pont

3. eset: a két nem derékszög melletti külső szögek aránya $5 : 4$ 1 pont

(A trapéz két nem derékszög belső szögének összege $180°$, ezért) a két nem derékszög melletti külső szög összege is $180°$.

A $180°$-ot kell felosztani $4 : 5$ arányban: $(180 : 9) \cdot 4 = 80°$, illetve $(180 : 9) \cdot 5 = 100°$. (A trapéz szögei $90°$, $90°$, $100°$ és $80°$), tehát a legkisebb szög ekkor $80°$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Egy medencét három csapon keresztül lehet feltölteni. Az 1. és a 2. csap 6 óra alatt, a 2. és 3. csap 4 óra alatt, az 1. és 3. csap 3 óra alatt tölti fel a medencét. Mennyi idő alatt töltik fel a medencét az egyes csapok külön-külön? **6 pont**

1. megoldás. Jelölje a, b, c azt, hogy az 1., 2., 3. csap a medence hányad részét tölti fel egy óra alatt.

Az adatok szerint $a + b = \frac{1}{6}$, $b + c = \frac{1}{4}$ és $c + a = \frac{1}{3}$. 1 pont

Ebből következik, hogy $a + b + c = \frac{3}{8}$, ahonnan $c = \frac{5}{24}$. 2 pont

Innen pedig $a = \frac{1}{8}$ és $b = \frac{1}{24}$. 1 pont

Tehát az első csap 8, a második csap 24, a harmadik $\frac{24}{5}$ óra alatt (4 óra 48 perc) tölti fel a medencét. 2 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés: Az a, b, c-re kapható lineáris egyenletrendszer felírására 1, bármilyen megoldására 3 pont adható. Bármilyen ezzel egyenértékű megoldás 4 pontot ér.

2. megoldás. Jelölje a, b, c azt, hogy mennyi idő alatt tölti fel az 1., a 2., illetve a 3. csap a medencét.

Az első csap tehát egy óra alatt a medence $\frac{1}{a}$ részét, a második az $\frac{1}{b}$ részét, a harmadik az $\frac{1}{c}$ részét tölti fel. 1 pont

Az első két csapból 6 óra alatt megtelik a medence, tehát $\frac{6}{a} + \frac{6}{b} = 1$ vagy $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6}$, hasonlóan a második és harmadik csapra $\frac{4}{b} + \frac{4}{c} = 1$ vagy $\frac{1}{b} + \frac{1}{b} = \frac{1}{4}$, valamint a harmadik és az első csapra $\frac{3}{c} + \frac{3}{a} = 1$ vagy $\frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{1}{3}$. 1 pont

Ekkor a következő egyenletrendszert kell megoldanunk:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{6} \qquad \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{c} + \frac{1}{a} = \frac{1}{3}$$ 1 pont

Az első és harmadik egyenlet összegéből kivonva a másodikat $\frac{2}{a} = \frac{1}{4}$, azaz $a = 8$ óra adódik. 1 pont

Hasonlóan $\frac{2}{b} = \frac{1}{12}$, azaz $b = 24$ óra, illetve $\frac{2}{c} = \frac{5}{12}$, azaz $c = \frac{24}{5}$ óra (4 óra 48 perc). 1 pont

Tehát az első csap 8, a második csap 24, a harmadik $\frac{24}{5}$ óra alatt (4 óra 48 perc) tölti fel a medencét. 1 pont

Összesen: **6 pont**

3. Egy diáknak öt egymást követő tanítási napon matematika, angol, biológia és fizika tantárgyakból kell dolgozatot írnia ebben a sorrendben úgy, hogy egy napon legfeljebb két dolgozatot írhat. Hányféleképpen oszthatják el a diák dolgozatait az öt napon? (A dolgozatok egy-egy napon belüli konkrét időpontjai nem számítanak.) **6 pont**

Megoldás. Három eset lehetséges: 1. mindegyik dolgozat külön napon van; 2. két (egymás után következő) dolgozat egy napon, a másik két dolgozat külön napokon van; 3. két-két dolgozat egy-egy napon van. 1 pont

Az 1. esetben az 5 napból választjuk ki azt a 4-et, amelyiken dolgozat van, vagy ezzel egyenértékűen azt az egyet, amelyiken nincs dolgozat: ez 5-féleképpen lehetséges. 1 pont

A 2. esetben 3 napot választunk ki a dolgozatok számára, vagy ezzel egyenértékűen 2 napot, amelyeken nincs dolgozat: ez $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$-féleképpen lehetséges. Ezután a 4 dolgozatból 3-féleképpen rakhatunk két egymás utánit egy napra, ami végül összesen $3 \cdot 10 = 30$ lehetőséget jelent. 2 pont

A 3. esetben az 5 napból kiválasztunk 2 napot, ami 10 lehetőség. 1 pont

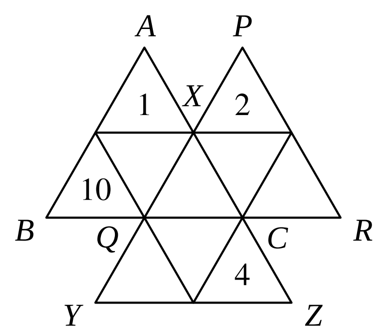
Összesen tehát $5 + 30 + 10 = 45$ lehetőség van a dolgozatok elosztására az adott feltételek mellett. 1 pont

Összesen: **6 pont**

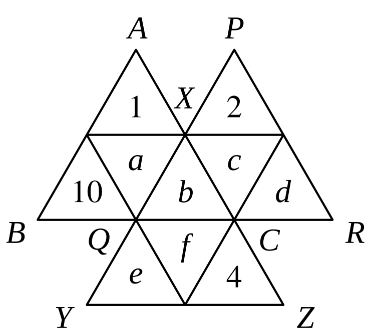
4. Az ábrán az ABC, PQR és XYZ háromszögek láthatók, amelyek mindegyike 4 kisebb háromszögre van felosztva. A 10 kicsi háromszögbe az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 számokat kell elhelyezni (mindegyiket egyszer felhasználva) úgy, hogy az ABC, PQR és XYZ háromszögekbe kerülő számok összege egyenlő legyen. Az 1, 2, 4, 10 számok elhelyezése előre adott.

Hány különböző módon tölthető ki az ábra?

Adjuk meg a megfelelő eseteket! **6 pont**



Megoldás. Jelöljük az üres mezőkbe kerülő számokat az ábra szerint.



Ekkor a betűvel jelölt mezőkbe a 3, 5, 6, 7, 8 és 9 számok fognak kerülni.

Összegezve az ABC, PQR, XYZ háromszögekbe kerülő számokat, a b háromszor, a többi pedig egyszer szerepel az összeadásban.

Így a háromszögbe kerülő számok összege

$$(1 + 2 + \ldots + 8 + 9 + 10) + 2b = 55 + 2b$$ 1 pont

Mivel mindhárom háromszögben a számok összege ugyanannyi, ezért $3 \mid 55 + 2b$.

Figyelembe véve b lehetséges értékeit, ez a feltétel csak a $b = 7$ esetben teljesül. 1 pont

Ekkor az egyes háromszögekbe kerülő számok összege $\dfrac{55 + 2 \cdot 7}{3} = 23$.

Ezt és a $b = 7$ feltételt figyelembe véve az ABC, PQR, XYZ háromszögekre felírható egyenletek:

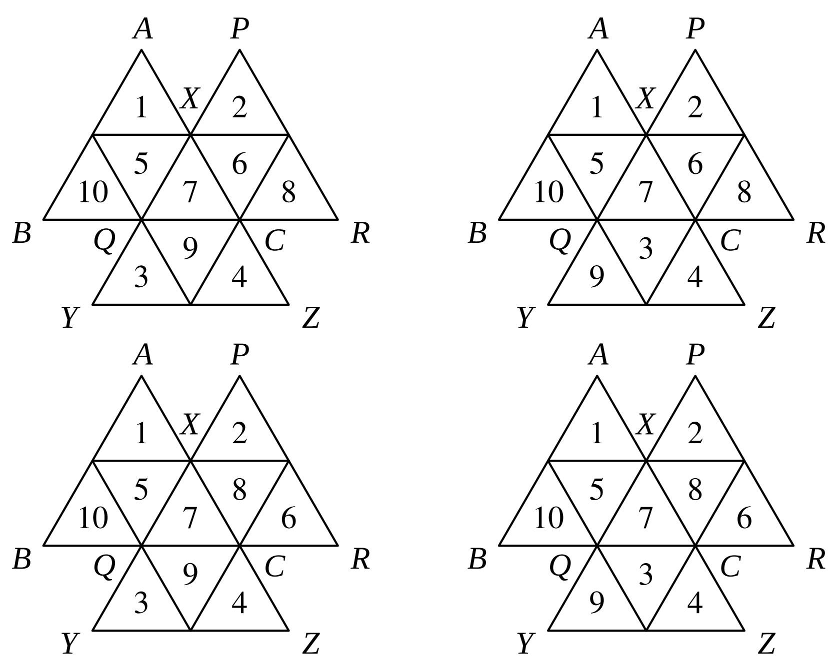
$$\begin{aligned} 1 + 10 + 7 + a &= 23 \\ 2 + 7 + c + d &= 23 \\ 4 + 7 + e + f &= 23 \end{aligned}$$

Ebből $a = 5$, $c + d = 14$ és $e + f = 12$ következik.

Mivel $\{c, d, e, f\} = \{3, 6, 8, 9\}$, ezért $\{c, d\} = \{6, 8\}$ és $\{e, f\} = \{3, 9\}$. 2 pont

Mivel a c, d, illetve e, f számpárok kiválasztása egymástól függetlenül 2–2-féleképpen történhet, ezért a megfelelő kitöltések száma $2 \cdot 2 = 4$.

Ezeket az alábbi ábrák mutatják:



2 pont

Megjegyzés: Ha a tanuló indoklás nélkül adja meg a helyes ábrákat, akkor csak 2 pontot kaphat.