Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2018/2019-es tanév
Kezdők I–II. kategória, 2. forduló
Kezdők III. kategória, 1. forduló

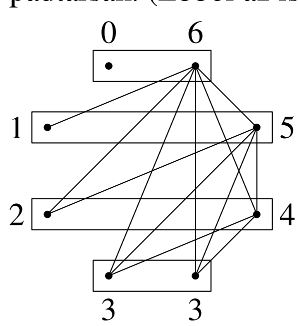
Megoldások és javítási útmutató

1. Egy matematika-szakkörön 8 diák vett részt. 4 padba ültek le úgy, hogy senki sem ismerte a padtársát. Az első padban András és Bea ültek. Tudjuk, hogy Andrást kivéve a többi 7 diáknak mind különböző számú ismerőse van a jelenlévő diákok között. Ki ismer több diákot a szakkörről, András vagy Bea? (Az ismeretséget kölcsönösnek tekintjük: ha X ismeri Y-t, akkor Y is ismeri X-et.) **6 pont**

Megoldás. Mivel senki nem ismeri a padtársát, ezért mindenki legfeljebb 6 diákot ismerhet, vagyis az ismerősök száma 0, 1, 2, 3, 4, 5 vagy 6 lehet, ami 7 lehetőség 7 emberre, vagyis mindegyik szám pontosan egyszer fordul elő. 1 pont

A 6 ismerőssel rendelkező diák a padtársán kívül mindenkit ismer, tehát csak mellette ülhet a 0 ismerőssel rendelkező diák. (Ebből az is következik, hogy Andrásnak nem lehet 0 vagy 6 ismerőse.) 1 pont

Vizsgáljuk a maradék 3 padnál lévő 6 diák egymás közti ismeretségeit. A teljes létszámot tekintve köztük van 1, 2, 3, 4, 5 ismerőssel rendelkező diák, de ha ebbe nem számoljuk bele a 6 ismerőssel rendelkező diákkal való kapcsolatot, akkor marad 0, 1, 2, 3, illetve 4 ismerős egymás közt. Megint elmondható, hogy a (maradék 3 pad 6 diákját tekintve) 4 ismerőssel rendelkező diák mindenkit ismer a padtársán kívül, tehát mellette kell, hogy üljön a (maradék 3 padot tekintve) 0 ismerőssel rendelkező diák. Vagyis a teljes létszámot tekintve 5, illetve 1 ismerőssel rendelkező diákok padtársak. (Ebből az is következik, hogy Andrásnak nem lehet 1 vagy 5 ismerőse.) 1 pont



Ez a gondolat folytatható a maradék 2 pad 4 diákjára is. Itt ülnek a teljes társaságot tekintve 2, 3, illetve 4 ismerőssel rendelkező diákok, akik egymás között 0, 1, 2 másikat ismernek (mert az előző 2 padból az 5-öst, illetve 6-ost ismeri mindenki). Az előzőekhez hasonlóan a 2-es mellett a 0-s kell, hogy üljön. Vagyis a teljes társaságban a 2, illetve 4 ismerőssel rendelkező diákok egymás mellett ülnek. (Ebből az is következik, hogy Andrásnak nem lehet 2 vagy 4 ismerőse.) 1 pont

A fenti gondolatmenetből az is kiderül, hogy a megmaradt, 3 ismerőssel rendelkező diák padtársa (András) kit ismer és kit nem: a 6, 5, illetve 4 ismerőssel rendelkezőket igen, a 0,1,2, illetve 3 ismerőssel rendelkezőket nem, tehát neki szintén 3 ismerőse van. 1 pont

Tehát Andrásnak és Beának egyaránt 3-3 ismerőse van. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Balázs felírt egy lapra egy olyan háromjegyű számot, amelynek számjegyei között nem szerepelt a 0. Ezután leírta alá azokat a háromjegyű számokat, amiket úgy kapott, hogy az eredeti szám számjegyeinek sorrendjét megváltoztatta. Miután az összes lehetséges számot felírta, a lapon szereplő számokat összeadta. Így 1776-ot kapott eredményül. Mennyi lehet a lapra elsőként felírt szám számjegyeinek összege? **8 pont**

Megoldás. *1. eset:* Balázs egy olyan számot írt fel, amelynek három különböző számjegye van. Jelölje a számot $\overline{abc}$. Ennek a számjegyei $3! = 6$-féle sorrendbe írhatók, így Balázs összesen 6 számot írt fel a lapra. 1 pont

Ezek összege: $\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bac} + \overline{bca} + \overline{cab} + \overline{cba} = 222 \cdot (a + b + c) = 1776$. 1 pont

Ekkor a számjegyek összege: $a + b + c = 8$. 1 pont

2. eset: Balázs egy olyan számot írt fel, amelynek két különböző számjegye van. Legyen a szám $\overline{aab}$. Ennek a számjegyei 3-féle sorrendbe írhatók, így Balázs összesen 3 számot írt fel a lapra. 1 pont

Ezek összege: $\overline{aab} + \overline{aba} + \overline{baa} = 111 \cdot (2a + b) = 1776$. 1 pont

Ekkor a számjegyek összege: $2a + b = 16$. 1 pont

Mindkét eset meg is megvalósulhat: például, ha Balázs a 125, illetve az 556 számot írta fel. 1 pont

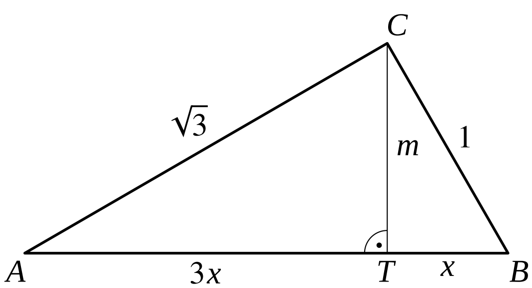
Tehát az eredeti szám számjegyeinek összege 8 vagy 16. 1 pont

Megjegyzés. Ha a megoldásban csak az egyik eset szerepel, legfeljebb 5 pont adható. (3 pont az eset vizsgálatáért, 1 pont annak igazolásáért, hogy valóban létezik adott tulajdonságú szám, 1 pont a válaszért.)

Összesen: **8 pont**

3. Az ABC háromszögben $AC = \sqrt{3}$ egység, $BC = 1$ egység, továbbá a C-ből induló magasság talppontja az AB oldal B-hez közelebbi negyedelőpontjával egyezik meg. Mekkorák az ABC háromszög szögei? **8 pont**

Megoldás. Készítsünk ábrát: jelölje T a szóban forgó magasság talppontját, m a magasság hosszát, és legyen $x = TB$! 1 pont



Ekkor a CTB derékszögű háromszögben a Pitagorasz-tétel alapján: $m^2 + x^2 = 1$. 1 pont

Mivel $AB = 4TB$, ezért $AT = 3x$, így az ATC derékszögű háromszögben ugyancsak a Pitagorasz-tétel alapján $m^2 + (3x)^2 = 3$. 1 pont

A két egyenletet egymásból kivonva $8x^2 = 2$, ahonnan $x = \frac{1}{2}$, és így $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 2 pont

Ekkor a CTB háromszög éppen egy fél szabályos háromszög, ezért a B-nél lévő szöge $60°$-os. 1 pont

Másrészt $m = \frac{\sqrt{3}}{2}$ miatt ATC is egy fél szabályos háromszög, ezért az A-nál lévő szöge $30°$-os. 1 pont

Az ABC háromszög szögei tehát $30°$, $60°$ és $90°$. 1 pont

Összesen: **8 pont**

4. Adott a síkon véges sok egyenes és véges sok pont a következő feltételekkel: minden egyenesre legfeljebb 4 pont illeszkedik, és minden ponton áthalad legalább 2 egyenes. Bizonyítsuk be, hogy a pontok száma legfeljebb az egyenesek számának kétszerese! Mutassunk egy-egy olyan példát, ahol egyenlőség áll fenn, és az egyenesek száma

a) páros

b) páratlan! **8 pont**

Megoldás. Jelölje a pontok számát k és az egyenesek számát n.

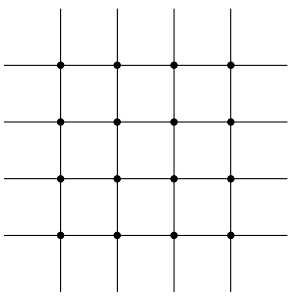
Legyen I az olyan (p, e) pont-egyenes párok halmaza, hogy $p \in e$. Vizsgáljuk meg, hogy mennyi lehet az I-beli párok darabszáma. 1 pont

Mivel minden egyenesre legfeljebb 4 pont illeszkedik, ezért $|I| \leqslant 4n$. 1 pont

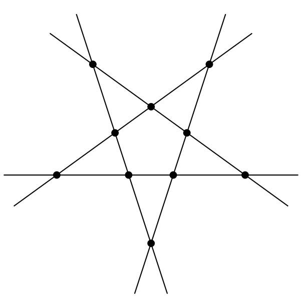
Mivel minden ponton áthalad legalább 2 egyenes, ezért $|I| \geqslant 2k$. 1 pont

A kettőt összevetve, $2k \leqslant 4n$, tehát $k \leqslant 2n$, az állítást igazoltuk. 1 pont

Lehetséges példák az egyenlőség esetére:



a) 8 egyenes, 16 pont, minden egyenesre pontosan 4 pont illeszkedik, minden ponton pontosan 2 egyenes halad át. 2 pont



b) 5 egyenes, 10 pont, minden egyenesre pontosan 4 pont illeszkedik, minden ponton pontosan 2 egyenes halad át. 2 pont

Megjegyzés. Minden olyan példa megfelel, ahol az egyenesek száma a feltételnek megfelelően páros/páratlan, minden egyenesre pontosan 4 pont illeszkedik és minden ponton pontosan két egyenes halad át.

Összesen: **8 pont**

Más lehetőség a feladat első részének indoklására:

Jelölje az egyenesek számát n. Minden pont egyenesre illeszkedik. 1 pont

Mivel egy egyenesre legfeljebb 4 pont illeszkedik, így legfeljebb $4n$ pont van adva, de mivel minden ponton legalább két egyenes megy át, azaz minden pontot legalább kétszer számoltunk, a felvett pontok száma valóban legfeljebb $2n$. 3 pont

5. Melyik két szomszédos egész szám közé esik a következő kifejezés értéke:

$$\frac{32}{31}-\frac{34}{33}+\frac{36}{35}-\frac{38}{37}+\ldots-\ldots+\frac{2016}{2015}-\frac{2018}{2017}$$

10 pont

Megoldás.

$$\begin{aligned}K&=\frac{32}{31}-\frac{34}{33}+\frac{36}{35}-\frac{38}{37}+\ldots-\ldots+\frac{2016}{2015}-\frac{2018}{2017}=\\&=1\frac{1}{31}-1\frac{1}{33}+1\frac{1}{35}-1\frac{1}{37}+\ldots-\ldots+1\frac{1}{2015}-1\frac{1}{2017}=\\&=\frac{1}{31}-\frac{1}{33}+\frac{1}{35}-\frac{1}{37}+\ldots-\ldots+\frac{1}{2015}-\frac{1}{2017}=\end{aligned}$$

2 pont

$$=\left(\frac{1}{31}-\frac{1}{33}\right)+\left(\frac{1}{35}-\frac{1}{37}\right)+\ldots-\ldots+\left(\frac{1}{2015}-\frac{1}{2017}\right)=$$

$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+2}=\frac{a+2-a}{a(a+2)}=\frac{2}{a(a+2)}$ alapján

$$=\frac{2}{31\cdot 33}+\frac{2}{35\cdot 37}+\ldots+\frac{2}{2015\cdot 2017}. \qquad (1)$$

2 pont

A másodiktól kezdve minden tag nagyobb, mint az első, ezért ezek felülről becsülhetők az elsővel, $\frac{2}{1023}$-dal. 3 pont

Az összegben szereplő tagok száma kevesebb, mint 1023 fele, hiszen a nevezőkben szereplő első tényezők 4-esével növekednek, ezért az összegnek kevesebb, mint $2015 : 4 < 504$ tagja van. (A tagok száma egészen pontosan $(2015-31) : 4+1 = 497$.) 1 pont

Mivel tehát a tagok száma kevesebb, mint 1023 fele, így K kisebb 1-nél, 1 pont
valamint K (1) alatti alakjából nyilvánvaló, hogy K pozitív, ezért a kifejezés értéke 0 és 1 közé esik. 1 pont

Összesen: **10 pont**