

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2019/2020-as tanév

1. forduló

Haladók I. kategória

Feladatok

1. A $\frac{166\dots6}{66\dots64}$ törtben a számláló és a nevező is egy-egy olyan 2019-jegyű egész szám, amely 2018 darab 6-os számjegyet tartalmaz. Adjuk meg a tört legegyszerűbb (tovább nem egyszerűsíthető) alakját!

7 pont

2. Léteznek-e olyan a, b, c, x pozitív valós számok, amelyekre az

$$\begin{aligned}a^2 + b^2 &= c^2 \\(a+x)^2 + (b+x)^2 &= (c+x)^2\end{aligned}$$

egyenlőségek egyszerre fennállnak?

7 pont

3. A 101 kiskutya között kiosztottunk 2019 csontot. Igazoljuk, hogy biztosan van három olyan kiskutya, akik ugyanannyi csontot kaptak.

7 pont

4. Igazoljuk, hogy léteznek olyan x és y pozitív egészek, valamint p és q különböző, legalább kétjegyű prímszámok, hogy

$$(x+y)^4 - x^4 = p \cdot q.$$

7 pont

5. Az ABC derékszögű háromszögben valamely súlyvonal merőleges valamely másik súlyvonalra. Mutassuk meg, hogy ekkor az ABC háromszög súlyvonalalaiból szerkesztett háromszög újra derékszögű lesz.

7 pont