**Bolyai János
Matematikai Társulat**

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2019/2020-as tanév

1. forduló

Haladók I. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. A $\dfrac{166\ldots6}{66\ldots64}$ törtben a számláló és a nevező is egy-egy olyan 2019-jegyű egész szám, amely 2018 darab 6-os számjegyet tartalmaz. Adjuk meg a tört legegyszerűbb (tovább nem egyszerűsíthető) alakját! **7 pont**

Megoldás.

A számlálóban 2018 db 6-os számjegy van. Végezzük el az alábbi átalakításokat:

$$\overline{166\ldots6} = 10^{2018} + 6\cdot\underbrace{11\ldots1}_{2018\text{ db}} = \qquad \text{1 pont}$$

$$= 10^{2018} + \frac{6}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2018\text{ db}} = 10^{2018} + \frac{2}{3}\cdot\left(10^{2018}-1\right) = \qquad \text{1 pont}$$

$$= 10^{2018} + \frac{2}{3}\cdot 10^{2018} - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}\cdot 10^{2018} - \frac{2}{3}. \qquad \text{1 pont}$$

Hasonlóan a nevező, amelyben szintén 2018 db 6-os számjegy van:

$$\overline{66\ldots64} = 60\cdot\underbrace{11\ldots1}_{2018\text{ db}} + 4 = \qquad \text{1 pont}$$

$$= \frac{60}{9}\cdot\underbrace{99\ldots9}_{2018\text{ db}} + 4 = \frac{20}{3}\cdot\left(10^{2018}-1\right) + 4 = \qquad \text{1 pont}$$

$$= \frac{20}{3}\cdot 10^{2018} - \frac{8}{3} = 4\cdot\left(\frac{5}{3}\cdot 10^{2018} - \frac{2}{3}\right). \qquad \text{1 pont}$$

A tört legegyszerűbb alakja tehát $\dfrac{1}{4}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Léteznek-e olyan a, b, c, x pozitív valós számok, amelyekre az

$$a^2+b^2=c^2$$
$$(a+x)^2+(b+x)^2=(c+x)^2$$

egyenlőségek egyszerre fennállnak? **7 pont**

1. megoldás. Induljunk ki az $(a+x)^2+(b+x)^2=(c+x)^2$ egyenlőségből. A műveleteket elvégezve

$$a^2+b^2+2ax+2bx+2x^2=c^2+2cx+x^2.$$

Figyelembe véve, hogy $a^2+b^2=c^2$

$$2ax+2bx+x^2=2cx.$$ 1 pont

A kapott egyenlőséget az $x>0$ kifejezéssel osztva

$$2a+2b+x=2c,$$
$$x=2(c-a-b).$$ 1 pont

Mivel $x>0$, ezért $c-a-b>0$, vagyis $c>a+b>0$. 1 pont

Mivel az $f(x)=x^2$ függvény a pozitív valós számok halmazán szigorúan monoton növekvő, ezért

$$c^2>a^2+b^2+2ab,$$ 1 pont

amiből az $a^2+b^2=c^2$ feltétel ismételt alkalmazásával a $0>2ab$ feltételhez jutunk. 1 pont

$a>0, b>0$ miatt ez ellentmondás, 1 pont

ami azt jelenti, hogy a feltételeknek megfelelő a, b, c, x számok nem léteznek. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Induljunk ki az $(a+x)^2+(b+x)^2=(c+x)^2$ egyenlőségből. A műveleteket elvégezve

$$a^2+b^2+2ax+2bx+2x^2=c^2+2cx+x^2.$$

Figyelembe véve, hogy $a^2+b^2=c^2$,

$$2ax+2bx+x^2=2cx.$$ 1 pont

A kapott egyenlőséget az $x>0$ kifejezéssel osztva

$$2a+2b+x=2c,$$
$$x=2(c-a-b).$$ 1 pont

Mivel a, b, c pozitív valós számok és $a^2+b^2=c^2$, ezért a és b tekinthető egy olyan derékszögű háromszög két befogójának, amelynek átfogója c. 1 pont

A háromszög-egyenlőtlenség alapján: $a+b>c$. 1 pont

Ezért $x=2\cdot(c-a-b)<0$. 1 pont

$x>0$ miatt ez ellentmondás, 1 pont

ami azt jelenti, hogy a feltételeknek megfelelő a, b, c, x számok nem léteznek. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. A 101 kiskutya között kiosztottunk 2019 csontot. Igazoljuk, hogy biztosan van három olyan kiskutya, akik ugyanannyi csontot kaptak. **7 pont**

Megoldás.

Indirekt tegyük fel, hogy nincs három kutya, aki azonos mennyiségű csontot kapott. Ebből következően minden lehetséges „mennyiséget” legfeljebb 2 kutya kaphatott. 1 pont

Vizsgáljuk az ebben az esetben kiosztott csontok minimális számát!

Ekkor legfeljebb 2-2 kutya kap 0; 1; 2;...; 49 csontot, és egy kutya 50 csontot. 2 pont

Ekkor a kiadott csontok száma:

$$2\cdot(0+1+2+\ldots+49)+50= \qquad \text{1 pont}$$

$$=2\cdot\frac{49\cdot 50}{2}+50=2500.$$

Tehát ebben az esetben minimum 2500 csont kell. 2 pont

Mivel ez több, mint 2019, ezért nem igaz, hogy minden lehetséges mennyiséget legfeljebb két kutya kapott, tehát van három olyan kutya, aki ugyanannyi csontot kapott. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Igazoljuk, hogy léteznek olyan x és y pozitív egészek, valamint p és q különböző, legalább kétjegyű prímszámok, hogy

$$(x+y)^4-x^4=p\cdot q.$$

7 pont

Megoldás. A bal oldalt szorzattá alakítjuk: $y\cdot(2x+y)\cdot\left((x+y)^2+x^2\right)=p\cdot q$. 2 pont

Legyen $p<q$. Mivel a jobb oldalon prímszámok szerepelnek és a bal oldalon három különböző pozitív egész tényező található nagyság szerinti sorrendben, ezért egy lehetőség van:

$$y=1; \qquad 2x+y=p; \qquad (x+y)^2+x^2=q. \qquad \text{2 pont}$$

$y=1$-et beírva:

$$2x+1=p,$$

$$2x^2+2x+1=q.$$

Szorozzuk a második egyenlet mindkét oldalát 2-vel:

$$4x^2+4x+2=2q$$

$$(2x+1)^2+1=2q,$$

azaz

$$p^2+1=2q. \qquad \text{2 pont}$$

Ilyen prímek léteznek, például: $p=11$, $q=61$, ekkor $x=5$. 1 pont

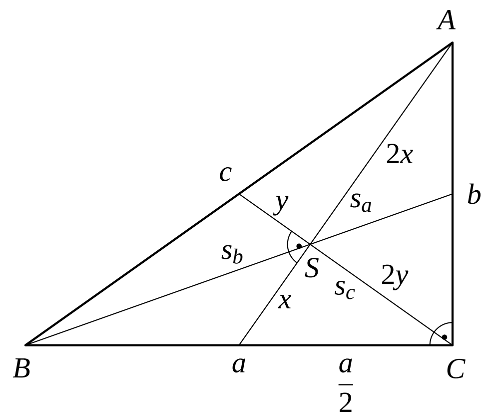
(Ez valóban megoldása az eredeti egyenletnek.)

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az utolsó három pont akkor is jár, ha a versenyző kipróbálja a legkisebb kétjegyű prímet (11), majd megoldja és ellenőrzi az egyenletet.

5. Az ABC derékszögű háromszögben valamely súlyvonal merőleges valamely másik súlyvonalra. Mutassuk meg, hogy ekkor az ABC háromszög súlyvonalaiból szerkesztett háromszög újra derékszögű lesz. **7 pont**

Megoldás. Mivel a két befogóhoz tartozó súlyvonal nem lehet merőleges egymásra, az egyik (a másik súlyvonalra merőleges) súlyvonal az átfogóhoz tartozik.



1 pont

Felhasználva azt a tételt, miszerint a súlypont a súlyvonalak oldalhoz közelebbi harmadolópontja, és felírva a megfelelő Pitagorasz-tételeket (4-gyel átszorozva) adódik:

$$a^2 = 4x^2 + 16y^2; \qquad b^2 = 4x^2 + 4y^2; \qquad c^2 = 16x^2 + 4y^2$$ 2 pont

Innen (az eredeti háromszögben felírt Pitagorasz-tétel miatt) adódik:

$$8x^2 + 20y^2 = 16x^2 + 4y^2 \Longrightarrow 2y^2 = x^2 \Longrightarrow \sqrt{2}y = x.$$ 2 pont

Innen az oldalak aránya: $a : b : c = \sqrt{24}y : \sqrt{12}y : \sqrt{36}y = \sqrt{2} : 1 : \sqrt{3}$. Újabb Pitagorasz-tételt felírva s_b súlyvonalra

$$s_b = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}} = \sqrt{27y},$$

így a súlyvonalak hosszainak négyzete: $s_a^2 = 18y^2$; $s_b^2 = 27y^2$; $s_c^2 = 9y^2$, ami miatt (Pitagorasz tételének megfordítása alapján) a súlyvonalakból valóban (az eredetihez hasonló) derékszögű háromszög szerkeszthető. 2 pont

Összesen: **7 pont**