Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2019/2020-as tanév
Haladók I. kategória, 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik tört a nagyobb,

$$\frac{2020^{2022}}{2022^{2020}} \qquad \text{vagy} \qquad \frac{2019^{2021}}{2021^{2019}}?$$ **7 pont**

Megoldás. Vizsgáljuk általánosan az $\frac{(n+1)^{n+3}}{(n+3)^{n+1}}$ és az $\frac{n^{n+2}}{(n+2)^n}$ törteket. (Ahol n pozitív egész szám.) 1 pont

Kis n-ekre kipróbálva, az első tört mindig nagyobb, így a sejtés az, hogy az első tört nagyobb. 1 pont

(Megjegyzés: Ez az 1 pont jár abban az esetben, ha indoklás nélküli helyes választ ad a feladat kérdésére, illetve akkor is megadható az 1 pont, ha nem próbálta ki kis n-ekre, de igazolja általánosan a helyes egyenlőtlenséget.)

$$\frac{(n+1)^{n+3}}{(n+3)^{n+1}} \overset{?}{>} \frac{n^{n+2}}{(n+2)^n}$$

Mivel mindkét nevező pozitív, a beszorzás nem változtatja a reláció irányát.

A nevezőkkel beszorozva, a bal oldal

$$(n+1)^{n+3}\cdot(n+2)^n = \big((n+1)^n\cdot(n+2)^n\big)\cdot(n+1)^3 = (n^2+3n+2)^n\cdot(n^3+3n^2+3n+1).$$ 2 pont

A jobb oldal:

$$(n+3)^{n+1}\cdot n^{n+2} = n^n\cdot(n+3)^n\cdot n^2\cdot(n+3) = (n^2+3n)^n\cdot(n^3+3n^2).$$ 1 pont

Mivel n pozitív egész szám, ezért a bal oldal átalakításával kapott szorzat mindkét tényezője nagyobb a jobb oldalon szereplő szorzat tényezőinél, ezért az első tört, azaz $\frac{2020^{2022}}{2022^{2020}}$ a nagyobb. 2 pont

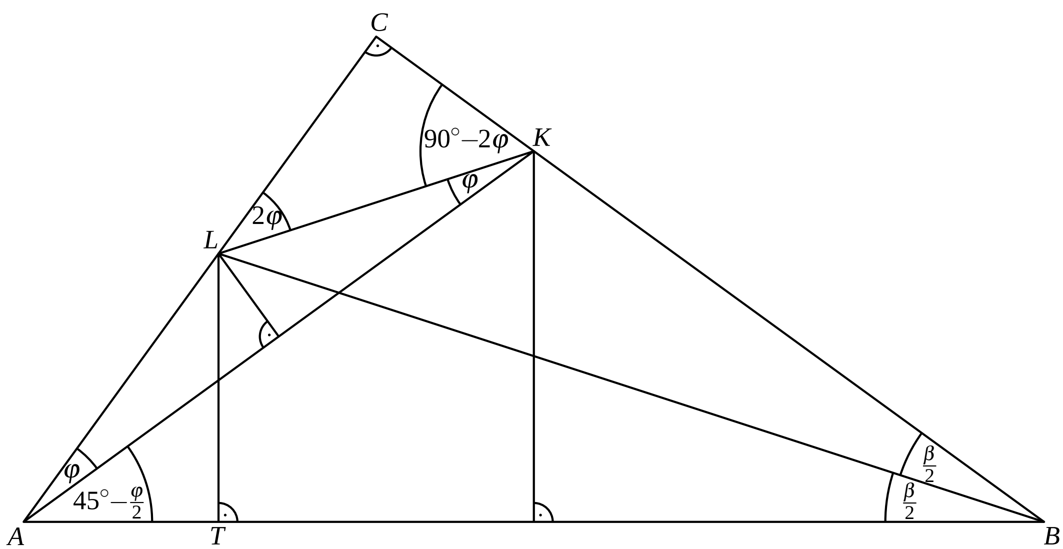
Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Amennyiben a versenyző a konkrét számokkal számolva korrektül bizonyít, a teljes pontszámot megkaphatja.

2. Az ABC háromszögben $BCA\sphericalangle = 90^\circ$. Az AB oldal felezőmerőlegese a BC oldalegyenest a K pontban metszi, az AK szakasz felezőmerőlegese a CA oldalegyenest pedig az L pontban. Határozzuk meg az ABC háromszög két hegyesszögét, ha tudjuk, hogy BL belső szögfelezője az ABC szögnek. **7 pont**

Megoldás. Három esetet vizsgálhatunk.

1. eset: $CA < CB$. Jelöljük az ABC háromszög szögeit α-val, β-val és γ-val. Mivel L rajta van az AK szakasz felezőmerőlegesén, ezért $LA = LK$ és $LAK\sphericalangle = LKA\sphericalangle = \varphi$.



Az AKL háromszögre a külsőszög-tételt alkalmazva $CLK\sphericalangle = 2\varphi$, és emiatt az LKC háromszögben $CKL\sphericalangle = 90^\circ - 2\varphi$.

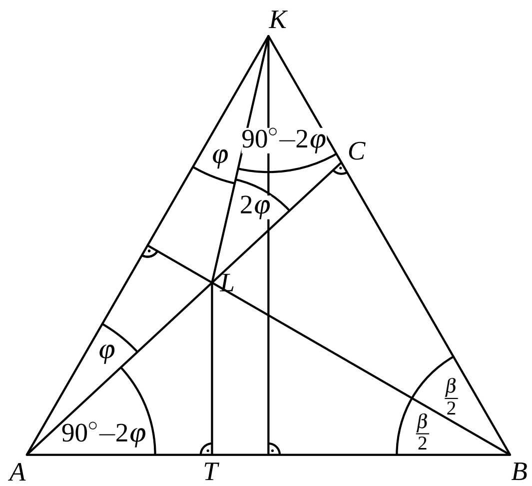
Az ABK egyenlő szárú háromszögre alkalmazva a külsőszög-tételt:

$$KAB\sphericalangle = KBA\sphericalangle = \frac{AKC\sphericalangle}{2} = 45^\circ - \frac{\varphi}{2}.$$ 1 pont

Legyen T az AB oldal azon pontja, amelyre $LT \perp AB$. Mivel BL belső szögfelezője β-nak, ezért $LT = LC$ és $ATL\triangle \cong KCL\triangle$, hiszen két-két oldal hossza és a hosszabbikkal szemközti szög nagysága egyenlő, emiatt $LAT\sphericalangle = LKC\sphericalangle$, 1 pont

azaz $\varphi + 45^\circ - \dfrac{\varphi}{2} = 90^\circ - 2\varphi$, amiből $\varphi = 18^\circ$.

Ezt felhasználva $\alpha = 45^\circ + \dfrac{\varphi}{2} = 54^\circ$ és $\beta = 36^\circ$. 1 pont



2. eset: $CA > CB$. Az előző esethez hasonló gondolatmenettel:

$$LAK\sphericalangle = LKA\sphericalangle = \varphi,$$

$$CLK\sphericalangle = 2\varphi,$$

amiből

$$LKC\sphericalangle = 90^\circ - 2\varphi.$$

$L \in f_\beta$ miatt $LT = LC$ és $ATL\triangle \cong KCL\triangle$ ($LT = LC, LA = LK, ATL\sphericalangle = LCK\sphericalangle = 90^\circ$), ezért

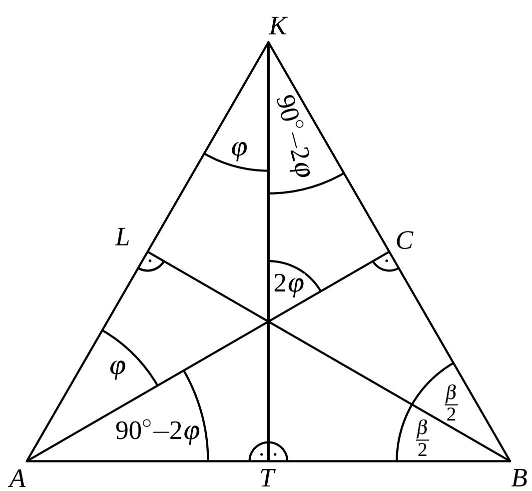
$$LAT\sphericalangle = LKC\sphericalangle = 90^\circ - 2\varphi,$$

ahonnan

$$BAK\sphericalangle = BKA\sphericalangle = 90^\circ - \varphi,$$

így

$$BA = BK.$$ 1 pont



Másrészt, mivel K rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén, ezért $KA = KB$, tehát az ABK háromszög szabályos, és így az A csúcsánál levő szöge 60°, vagyis

$$\varphi + 90^\circ - 2\varphi = 60^\circ,$$

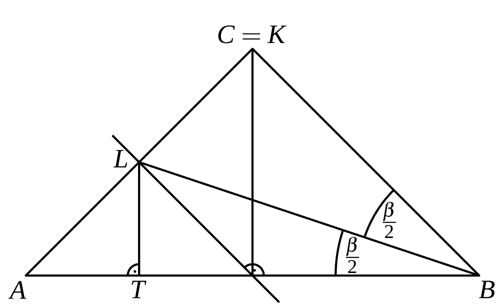
ezért

$$\varphi = 30^\circ,$$

tehát

$$\alpha = 90^\circ - 2\varphi = 30^\circ,$$

$$\beta = 180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$ 1 pont



3. eset: $CA = CB$. Ebben az esetben $K \equiv C$, L az AC oldal felezőpontja és $LC = LA$. 1 pont

Másrészt emiatt $LT = LC$, vagyis $LT = LA$, ami nyilvánvalóan nem lehetséges, mivel az ATL derékszögű háromszögben LA átfogó, LB pedig befogó. Így ez az eset nem valósulhat meg. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Bizonyítsuk be, hogy $5401^n - 2710^n - 2036^n + 1364^n$ minden n természetes szám esetén osztható 2019-cel. **7 pont**

Megoldás. $5401^n - 2710^n - 2036^n + 1364^n = 5401^n - 2710^n - (2036^n - 1364^n)$ 1 pont

Felhasználva, hogy $a^n - b^n$ osztható $(a-b)$-vel, $5401^n - 2710^n$ osztható $5401 - 2710 = 2691$-gyel, így osztható 3-mal is. 1 pont

Hasonlóan: $2036^n - 1364^n$ osztható $2036 - 1364 = 672$-vel, így osztható 3-mal is. 1 pont

Ugyanakkor: $5401^n - 2710^n - 2036^n + 1364^n = (5401^n - 2036^n) - (2710^n - 1364^n)$. 1 pont

Az előbbieknek megfelelően: $5401^n - 2036^n$ osztható $5401 - 2036 = 3365$-tel, így osztható 673-mal is. 1 pont

Ugyanígy: $2710^n - 1364^n$ osztható $2710 - 1364 = 1346$-tal, így osztható 673-mal is. 1 pont

A kifejezés minden természetes szám esetén osztható 673-mal és 3-mal. Mivel a 673 és a 3 relatív prímek, ezért a kifejezés mindig osztható $3 \cdot 673 = 2019$-cel. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Bizonyítsuk be, hogy minden 17-nél nagyobb pozitív egész szám előállítható három 1-nél nagyobb egész szám összegeként, ahol az összegben szereplő számok páronként relatív prímek. Igazoljuk, hogy a 17 nem állítható elő ugyanilyen módon. **7 pont**

Megoldás. Legyen $k \geq 3$, $k \in N^+$. Ekkor a

$$18 = 2 + 3 + 13, \qquad 20 = 3 + 4 + 13, \qquad 22 = 2 + 3 + 17$$

felbontások alapján:

$$6k = 2 + 3 + (6k - 5), \qquad 6k + 2 = 3 + 4 + (6k - 5), \qquad 6k + 4 = 2 + 3 + (6k - 1)$$ 2 pont

A $6k+1$, $6k+3$, $6k+5$ típusú számokat két-két csoportra osztva például az alábbi előállítások lehetségesek:

$$\begin{aligned} 12l + 1 &= 9 + (6l - 1) + (6l - 7), \qquad & 12m + 7 &= 3 + (6m - 1) + (6m + 5) \\ 12l + 3 &= 3 + (6l - 1) + (6l + 1), \qquad & 12m + 9 &= 9 + (6m - 1) + (6m + 1) \\ 12l + 5 &= 9 + (6l - 5) + (6l + 1), \qquad & 12m + 11 &= 3 + (6m + 1) + (6m + 7) \end{aligned}$$

$$(l \in \mathbb{N}^+, m \in \mathbb{N}^+, l \geq 2, m \geq 1)$$ 3 pont

Ezután azt fogjuk belátni, hogy a 17 nem bontható fel a feladat feltételei szerint háromtagú összegre. Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy $17 = a + b + c$, ahol a, b, c páronként relatív prímek, és $1 < a < b < c$ $(a, b, c \in \mathbb{N}^+)$. Ekkor az a, b, c számok mindegyikének páratlannak kell lennie.

$a = 3$ esetén a $3 + 5 + 7 < a + b + c = 17 < 3 + 5 + 11$,

$a \geq 5$ esetén pedig $b \geq 7$, $c \geq 9$ miatt az $a + b + c \geq 5 + 7 + 9 = 21 > 17$

egyenlőtlenség igazolja, hogy a kívánt felbontás nem valósítható meg. 2 pont

Összesen: **7 pont**