Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

1. Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x-6\sqrt{x-2}+7}\cdot\sqrt{-x+6\sqrt{6-x}+15}$ függvény értékkészletét! **7 pont**

2. Határozzuk meg az

$$xy+yz+zx=xyz+2$$

egyenlet megoldásait a pozitív egész számok halmazán! **7 pont**

3. Két kör kívülről érinti egymást. A két kör közös külső érintőinek metszéspontja M. Az M pontból induló félegyenes mindkét kört metszi. A metszéspontok – az M pont felől indulva a félegyenesen – sorban A, B, C és D. Mekkora a körök sugara, ha $MA=3$, $AB=2$ és $BC=1$? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg az $f(x)=\sqrt{x-6\sqrt{x-2}+7}\cdot\sqrt{-x+6\sqrt{6-x}+15}$ függvény értékkészletét! **7 pont**

Megoldás. Mivel

$$x-6\sqrt{x-2}+7=\left(\sqrt{x-2}-3\right)^2$$ 1 pont

és

$$-x+6\sqrt{6-x}+15=\left(\sqrt{6-x}+3\right)^2,$$ 1 pont

ezért $\sqrt{x-6\sqrt{x-2}+7}=\left|\sqrt{x-2}-3\right|$ és $\sqrt{-x+6\sqrt{6-x}+15}=\left|\sqrt{6-x}+3\right|$. 1 pont

Az értelmezési tartomány: $2\le x\le 6$, ezért $\sqrt{x-2}-3<0$ és $\sqrt{6-x}+3>0$, vagyis

$$f(x)=\left|\sqrt{x-2}-3\right|\cdot\left|\sqrt{6-x}+3\right|=\left(-\sqrt{x-2}+3\right)\left(\sqrt{6-x}+3\right).$$ 1 pont

A szorzat mindkét tényezője pozitív, és mindkét tényező csökkenő a $[2;6]$ intervallumon, 1 pont

ezért a maximum: $f(2)=15$, a minimum: $f(6)=3$. 1 pont

Mivel a függvények folytonosak, az értékkészlet: $[3;15]$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Határozzuk meg az

$$xy+yz+zx=xyz+2$$

egyenlet megoldásait a pozitív egész számok halmazán! **7 pont**

Megoldás. Mivel az egyenlet a benne szereplő változókra szimmetrikus, ezért először keressük meg azokat a megoldásokat, melyeknél $x\le y\le z$.

Az egyenlet mindkét oldalát elosztva az $xyz > 0$ kifejezéssel:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1+\frac{2}{xyz}$$

Ezt felhasználva:

$$1<1+\frac{2}{xyz}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\leq\frac{3}{x}$$ 2 pont

Ebből $x=1$ vagy $x=2$ adódik. 1 pont

$x=1$ esetén az eredeti egyenletbe helyettesítve $y+z=2$, amiből a feltételek alapján $y=z=1$ adódik. 1 pont

$x=2$ esetén

$$\begin{aligned}2y+2z&=yz+2\\2&=(y-2)(z-2)\end{aligned}$$

ahonnan $2\leq y\leq z$ figyelembevételével

$$\begin{aligned}y-2&=1 &\quad\text{és}\quad&& z-2&=2\\ y&=3 &&& z&=4\end{aligned}$$

adódik. 2 pont

Ez alapján az egyenlet összes megoldása

$$M=\{(1;1;1);\,(2;3;4);\,(2;4;3);\,(3;2;4);\,(3;4;2);\,(4;2;3);\,(4;3;2)\}.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Két kör kívülről érinti egymást. A két kör közös külső érintőinek metszéspontja M. Az M pontból induló félegyenes mindkét kört metszi. A metszéspontok – az M pont felől indulva a félegyenesen – sorban A, B, C és D. Mekkora a körök sugara, ha $MA=3$, $AB=2$ és $BC=1$? **7 pont**

Megoldás. A kisebb kör sugara legyen r, a nagyobb köré R.

A két kör középpontosan hasonló, a hasonlóság centruma az M pont, aránya $MC:MA=6:3=2$. 2 pont

Ezért $R=2r$, és $CD=2AB=4$. 1 pont

Legyen az AB húr felezőpontja E, a CD húré F, a kis kör középpontja K, a nagy köré L.

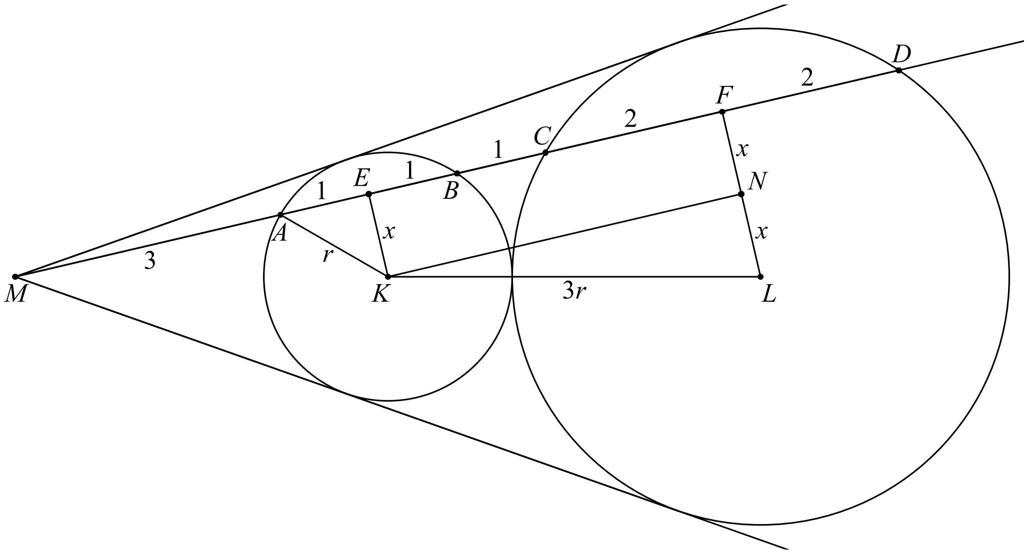
Ekkor EK és FL merőleges az M-ből induló MA félegyenesre. Húzzunk a K-n keresztül párhuzamost a félegyenessel, ez az FL szakaszt N-ben metszi. A $KNFE$ négyszög téglalap, ezért $FN=KE=x$.

Továbbá az FL szakasz az EK szakasz képe a kétszeres nagyításnál, ezért $FL=2x$, így $NL=x$. 1 pont

Az AEK derékszögű háromszögből $x^2+1=r^2$, 1 pont

a KNL háromszögből $(3r)^2=x^2+4^2$. 1 pont

Innen $r=\sqrt{\frac{15}{8}}=\frac{\sqrt{30}}{4}$ és $R=2\sqrt{\frac{15}{8}}=\frac{\sqrt{30}}{2}$. 1 pont



Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Ha a tanuló nem gyökteleníti a nevezőt, azért ne veszítsen pontot.