

## Kezdők II. kategória 3. (döntő) forduló

### Feladatok

1. Az  $ABCD$  konvex négyszög átlói az  $E$  pontban metszik egymást. Az  $ABE$  háromszög magasságpontja  $M$ , a  $BCE$ ,  $CDE$  és  $DAE$  háromszögek körülírt köreinek középpontja rendre  $O_1$ ,  $O_2$  és  $O_3$ . A négyszöget az említett pontokkal együtt lerajzoljuk egy lapra, majd az ábrát az  $M$ ,  $O_1$ ,  $O_2$  és  $O_3$  pontok kivételével töröljük. A négy megmaradt pontból körző és vonalzó segítségével hogyan tudjuk megszerkeszteni az ábra hiányzó részleteit? **10 pont**
2. Az  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  valós számokra teljesül, hogy  $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 + a_6^2 = 2$ . Adott hat négyzet, amelyek oldalainak hossza  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ . Bizonyítsuk be, hogy ez a hat négyzet átfedés nélkül elhelyezhető egy 2 egység oldalhosszúságú négyzetben! **10 pont**
3. Lehetséges-e az egész számok halmazát három olyan páronként diszjunkt részhalmazra felosztani, hogy bármely  $n \in \mathbf{Z}$  esetén  $n, n - 50, n + 2020$  három különböző részhalmazba tartozzon? **10 pont**