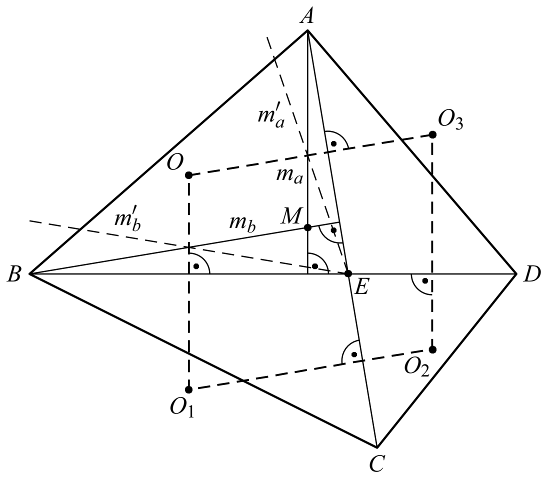
Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ konvex négyszög átlói az E pontban metszik egymást. Az ABE háromszög magasságpontja M, a BCE, CDE és DAE háromszögek körülírt köreinek középpontja rendre O_1, O_2 és O_3. A négyszöget az említett pontokkal együtt lerajzoljuk egy lapra, majd az ábrát az M, O_1, O_2 és O_3 pontok kivételével töröljük. A négy megmaradt pontból körző és vonalzó segítségével hogyan tudjuk megszerkeszteni az ábra hiányzó részleteit? **10 pont**

Megoldás.



Legyen az ABE háromszög körülírt körének középpontja O. Ekkor az OO_1 és O_2O_3 egyenesek merőlegesek a BD átlóra, az O_1O_2 és O_3O egyenesek pedig az AC átlóra.

Így az $OO_1O_2O_3$ négyszög szemközti oldalai párhuzamosak, tehát a négyszög paralelogramma. 3 pont

A paralelogramma OO_2 és O_1O_3 átlói felezik egymást, ezért O_2-t az O_1O_3 szakasz felezőpontjára tükrözve O megszerkeszthető. 1 pont

Másrészt az ABE háromszög A, illetve B csúcsához tartozó m_a, illetve m_b magassága rendre párhuzamos az OO_1, illetve OO_3 egyenesekkel. Ezekre a magasságokra illeszkedik M, ezért M ponton keresztül OO_1-gyel, illetve OO_3-mal párhuzamost húzva megkaphatjuk az m_a és m_b egyeneseket. 2 pont

Az A csúcs OO_3, illetve a B csúcs OO_1 egyenesre vonatkozó tükörképe E, ezért ha az A, illetve a B pontokat tartalmazó m_a és m_b egyeneseket tükrözzük rendre az OO_3, illetve az OO_1 egyenesekre, akkor az m'_a és m'_b egyenesek metszéspontjaként megkaphatjuk az E pontot. 3 pont

Ezután az E pontot tükrözve az $OO_1O_2O_3$ paralelogramma oldalegyeneseire már az eredeti négyszög csúcsaihoz jutunk. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Az a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 valós számokra teljesül, hogy $a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2+a_6^2=2$. Adott hat négyzet, amelyek oldalainak hossza a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6. Bizonyítsuk be, hogy ez a hat négyzet átfedés nélkül elhelyezhető egy 2 egység oldalhosszúságú négyzetben! **10 pont**

Megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6$.

A megoldás során többször használjuk az

$$(a+b)^2 \leq 2(a^2+b^2) \qquad (*)$$

egyenlőtlenséget. Ez könnyen igazolható a számtani-négyzetes közepek közti egyenlőtlenséggel vagy egy oldalra rendezve teljes négyzet kialakításával.

A megoldás ötlete, hogy a négyzet három, diszjunkt belsejű sávra osztható, és mindhárom sávban elhelyezhetünk két-két négyzetet.

Először megmutatjuk, hogy $a_1+a_3+a_5 \le 2$.

$$a_3^2+a_5^2 \le \frac{a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2}{2} \le \frac{2-a_1^2-a_6^2}{2} \le 1-\frac{a_1^2}{2}.$$

Ekkor $(*)$ miatt $a_3+a_5 \le \sqrt{2-a_1^2}$. Tehát

$$a_1+a_3+a_5 \le a_1+\sqrt{2-a_1^2} \overset{(*)}{\le} \sqrt{2a_1^2+4-2a_1^2} = 2.$$

Tehát három sáv (például a_1, a_3 és a_5 oldalhosszakkal) átfedés nélkül elhelyezhető a négyzetben.

Az egyenlőtlenség szerint a 2 egység oldalhosszúságú négyzetben átfedés nélkül elfér egymás fölött egy $2\times a_1$, $2\times a_3$ és egy $2\times a_5$-ös téglalap. 6 pont

A sávokban elhelyezhető a két-két négyzet. Ez például az alábbi módon igazoható.

Helyezzük el az a_1 és az a_2 oldalhosszúságú négyzetet az első, az a_3 és az a_4 oldalhosszúságú négyzetet a második, az a_5 és az a_6 oldalhosszúságú négyzetet a harmadik téglalapban! Ez megvalósítható, ha $a_1+a_2 \le 2$, hiszen ebből következik $a_3+a_4 \le 2$ és $a_5+a_6 \le 2$ is.

$$a_1+a_2 \overset{(*)}{\le} \sqrt{2(a_1^2+a_2^2)} \le \sqrt{2\cdot 2} = 2$$

Ezzel az állítást igazoltuk. 4 pont

Megjegyzések. Pontozás: Annak igazolása, hogy három sáv (például a_1, a_3 és a_5 oldalhosszakkal) átfedés nélkül elhelyezhető a négyzetben. Minta: 6 pont

Annak igazolása, hogy a sávokban elhelyezhető a két-két négyzet. 4 pont

A megoldás során nincs jelentősége, hogy éppen hat négyzetről van szó, a feladat általánosítható.

3. Lehetséges-e az egész számok halmazát három olyan páronként diszjunkt részhalmazra felosztani, hogy bármely $n \in \mathbf{Z}$ esetén n, $n-50$, $n+2020$ három különböző részhalmazba tartozzon? **10 pont**

Megoldás. Indirekt módon tegyük fel, hogy a $\mathbf{Z}$ halmaz elemeinek felosztása a kívánt módon elvégezhető.

Használjuk fel az $m \leftrightarrow k$ jelölést arra, hogy m és k azonos részhalmazba tartoznak, az $m \not\leftrightarrow k$ jelölést arra, hogy m és k különböző részhalmazokhoz tartoznak, a $(p;q;r) \in K$ jelölést pedig arra, hogy a p, q, r egészek 3 különböző részhalmazhoz tartoznak.

A bevezetett jelölések alapján:

$$(n;n-50;n+2020) \in K, \tag{1}$$

$$(n-50;n-100;n+1970) \in K, \tag{2}$$

$$(n+2020;n+1970;n+4040) \in K, \tag{3}$$

1 pont

Így az (1), (2), (3) figyelembevételével:

$$n+1970 \not\leftrightarrow n-50,$$
$$n+1970 \not\leftrightarrow n+2020,$$
$$n-50 \not\leftrightarrow n+2020,$$

Ebből következik, hogy

$$(n+1970; n-50; n+2020) \in K \qquad \text{és} \qquad n \leftrightarrow n+1970. \tag{4}$$ 2 pont

Másrészt (2) és (4) alapján $(n-50; n-100; n) \in K$.

Az utolsó feltételt más formában felírva és többször alkalmazva:

$$(n; n-50; n-100) \in K, \tag{5}$$

$$(n-50; n-100; n-150) \in K. \tag{6}$$

Az indirekt feltevés és az (5), (6) megállapítások figyelembevételével $n \leftrightarrow n-150$. (7) 1 pont

A (4), (7) kapcsolatok többszöri alkalmazásával:

$$\begin{aligned} 0 \leftrightarrow 1970 \leftrightarrow 2\cdot 1970 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow 5\cdot 1970 = \\ = 9850 \leftrightarrow 9850-150 \leftrightarrow 9850-2\cdot 150 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow 9850-65\cdot 150 = \\ = 100 \leftrightarrow -50. \end{aligned}$$ 3 pont

Viszont az $n \not\leftrightarrow n-50$ feltétel alapján $0 \not\leftrightarrow -50$. 1 pont

Így ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy az egész számok megadott felosztása nem végezhető el. 1 pont

Összesen: 10 pont