

Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(x - b)^2 + c^2}$$

függvényt, ahol a, b, c pozitív valós számok. Hol veszi fel ez a függvény a minimális értékét? **10 pont**

2. Az f függvény egy P sík minden K pontjához hozzárendel egy valós számot, amelyre teljesül, hogy $f(K) = f(A) + f(B) + f(C)$, ha K az ABC háromszög súlypontja. Bizonyítsuk be, hogy a sík minden X pontjára $f(X) = 0$! **10 pont**

3. Ha n pozitív egész szám, akkor jelöljük $r(n)$ -nel azt a számot, ahányféleképpen n előáll három négyzetszám összegeként (ezek között lehetnek azonosak, és a 0-t is megengedjük, és két felírást azonosnak tekintünk, ha csak a tagok sorrendjében térnek el). Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész szám létezik, amelyre $r(n) > \frac{\sqrt{n}}{100}$. **10 pont**