Megoldások és javítási útmutató

1. Tekintsük a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x)=\sqrt{x^2+a^2}+\sqrt{(x-b)^2+c^2}$$

függvényt, ahol a, b, c pozitív valós számok. Hol veszi fel ez a függvény a minimális értékét? **10 pont**

Megoldás. Vegyük észre, hogy a feladatbeli függvény nem más, mint a $P(x,0)$, $Q(b,c)$, $R(0,a)$ pontokra felírt PR és PQ távolságok összege. 5 pont

Ez minimális, ha a három pont kollineáris. 2 pont

Felrajzolva az ábrát, a Q pontot tükrözve az x tengelyre, a derékszögű háromszögek hasonlóságából következik, hogy

$$x=\frac{ab}{a+c}$$

esetén lesz a szakaszok összhossza minimális. 3 pont

Összesen: **10 pont**

2. Az f függvény egy P sík minden K pontjához hozzárendel egy valós számot, amelyre teljesül, hogy $f(K)=f(A)+f(B)+f(C)$, ha K az ABC háromszög súlypontja. Bizonyítsuk be, hogy a sík minden X pontjára $f(X)=0$! **10 pont**

Megoldás. Válasszunk ki egy tetszőleges S pontot a síkon. Vegyünk fel egy tetszőleges ABC szabályos háromszöget, amelynek a súlypontja S.

Ezért $f(S)=f(A)+f(B)+f(C)$. 1 pont

A CA, AB, BC oldalak felezőpontjai legyenek rendre L, M, N.

Ismeretes, hogy az LMN háromszög súlypontja is S, ezért $f(S)=f(L)+f(M)+f(N)$. 2 pont

A LAM, MBN, NCL háromszögek súlypontjait jelölje rendre U, V, W. Az UVW háromszög az ABC háromszögből S középpontú $\frac{1}{2}$ arányú hasonlósággal kapható, így UVW súlypontja is S. Ezért $f(S)=f(U)+f(V)+f(W)$. 3 pont

Mivel

$$f(U)=f(L)+f(A)+f(M),\quad f(V)=f(M)+f(B)+f(N),\quad f(W)=f(N)+f(C)+f(L),$$ 1 pont

így

$$\begin{aligned}f(S)&=f(U)+f(V)+f(W)=\\&=f(L)+f(A)+f(M)+f(M)+f(B)+f(N)+f(N)+f(C)+f(L)=\\&=f(A)+f(B)+f(C)+2[f(L)+f(M)+f(N)]=\\&=3f(S),\end{aligned}$$ 1 pont

ahonnan $f(S)=0$. 1 pont

Mivel a sík tetszőleges pontját megválaszthatjuk valamely szabályos háromszög középpontjának, ezért a sík minden pontjára nulla a függvényérték. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. Ha n pozitív egész szám, akkor jelöljük $r(n)$-nel azt a számot, ahányféleképpen n előáll három négyzetszám összegeként (ezek között lehetnek azonosak, és a 0-t is megengedjük, és két felírást azonosnak tekintünk, ha csak a tagok sorrendjében térnek el). Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan n pozitív egész szám létezik, amelyre $r(n) > \dfrac{\sqrt{n}}{100}$. **10 pont**

Megoldás. Valamely nagy X pozitív egészre tekintsük a térbeli derékszögű koordináta-rendszerben az origó középpontú X sugarú gömböt. Legyen a gömb belsejébe eső egész koordinátájú rácspontok száma $N(X)$. Egyrészt $N(X) \geq \dfrac{X^3\pi}{6} > \dfrac{X^3}{2}$, hiszen minden ilyen rácspont köré egy $2 \times 2 \times 2$-es kockát téve lefedjük a $\dfrac{4X^3\pi}{3}$ térfogatú gömböt. 3 pont

Másrészt ha egy gömbön belüli rácspont koordinátái (x,y,z), akkor $x^2+y^2+z^2 = n$ valamely $0 \leq n \leq X^2-1$ egészre a Pitagorasz-tétel szerint. A három koordinátát legfeljebb hatféleképpen permutálhatjuk, továbbá mindegyik koordinátának legfeljebb kétféle előjelet adhatunk (pl. az (x,y,z) és az $(y,-x,-z)$ ugyanazt a három négyzetszámot adják), ennélfogva

$$48(r(0)+r(1)+\ldots+r(X^2-1)) \geq \frac{X^3}{2}.$$ 3 pont

Ekkor, mivel a bal oldali zárójelben a tagok száma X^2, valamely $0 \leq n < X^2$-re

$$r(n) > \frac{X}{100} > \frac{\sqrt{n}}{100}.$$ 3 pont

Ezzel egy megfelelő n-et találtunk, de könnyen módosíthatjuk az érvelést úgy, hogy ez végtelen sokat adjon. Nevezetesen adjuk a következő felső becslést $r(n)$-re: $r(n) \leq (\sqrt{n}+1)^3$, hiszen mindhárom négyzetszám a $\left[0,1,4,\ldots,\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2\right]$ intervallumból kerül ki. Következésképpen arra az előbb kapott n-re, amelyre $r(n) > \dfrac{X}{100}$,

$$\frac{X}{100} < r(n) \leq (\sqrt{n}+1)^3, \qquad n > \left(\sqrt[3]{\frac{X}{100}} - 1\right)^2,$$

amiből világos, hogy végtelen sok kérdezett tulajdonságú n van, hiszen az utolsó egyenlőtlenség jobb oldala (és így a nála nagyobb bal oldal is) tetszőlegesen nagy lehet. 1 pont

Összesen: **10 pont**