Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2020/2021-es tanév

Haladók I. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Keressük meg mindazokat a $p \in \mathbb{N}$ prímszámokat, amelyekre $p^3+p^2+11p+2$ is prím! **7 pont**

Megoldás. A legkisebb pozitív prímszám a 2, erre az egész kifejezés páros számot ad, tehát ez nem jó. 1 pont

$p=3$-ra az összeg 71, ez prím, tehát $p=3$ jó. 1 pont

A továbbiakban, ha n egy hárommal nem osztható egész szám, akkor felírható $3k+1$ vagy $3l+2$ alakban. Ha $n=3k+1$, akkor

$$(3k+1)^3+(3k+1)^2+11(3k+1)+2 = 27k^3+36k^2+48k+15,$$ 1 pont

ami 3-mal osztható, és pozitív n esetén háromnál nagyobb, tehát nem lehet prímszám. 1 pont

Ha $n=3l+2$, akkor

$$(3l+2)^3+(3l+2)^2+11(3l+2)+2 = 27k^3+63k^2+81k+36,$$ 1 pont

ahol szintén az összeg minden tagja osztható 3-mal, így az egész kifejezés is, ezért ekkor se kaphatunk prímet. 1 pont

Azaz egyetlen, a feladat feltételének eleget tevő pozitív prímszám van, a $p=3$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Egy öt házaspárból álló társaság olyan játékot játszik, amelyhez két csoportba kell osztani őket úgy, hogy az első csoportban hat fő legyen, közülük legalább két házaspár. Hányféle módon lehet a felosztást megvalósítani? **7 pont**

Megoldás. Az, hogy a hat személy között legalább két házaspár legyen, azt jelenti, hogy vagy *a)* pontosan két házaspár van a csoportban, vagy *b)* három házaspárból áll a csoport. Ennek megfelelően külön-külön határozzuk meg a felbontások számát, a végeredmény az így kapott két szám összege lesz. 2 pont

a) Két házaspárt az 5 közül $\frac{5\cdot 4}{2}=10$-féle módon tudunk kiválasztani. 1 pont

A maradék 6 emberből még kettőt kell hozzájuk választani, de ők nem lehetnek házastársak. Így bármely kiválasztott taghoz csak 4 másik embert választhatunk, azaz a lehetőségek száma:

$$\frac{6\cdot 4}{2}=12,$$ 1 pont

azaz az *a)* esetet megvalósító összes lehetőség $10\cdot 12=120$. 1 pont

A *b)* esetben 3 házaspárt választunk, ekkor 2 házaspárt kihagyunk az előzőekben leírtak szerint; ezt 10-féle módon tehetjük meg. 1 pont

Az összes lehetőség tehát $120+10=130$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy sorozat első tagja $a_1=\frac{1}{2}$, és tetszőleges $n>1$ természetes szám esetén a sorozat n-edik tagját az

$$a_n=\frac{1}{1-a_{n-1}}.$$

képlet adja meg Határozzuk meg a sorozat 2020-adik tagját és a sorozat első 2020 tagjának az összegét! **7 pont**

Megoldás. A sorozat első néhány elemét kiszámítva

$$\frac{1}{2};\quad 2;\quad -1;\quad \frac{1}{2};\quad \dots$$

észrevehető, hogy a sorozat periodikus. 2 pont

A periódus hossza 3. 1 pont

$2020=3\cdot 673+1$, azaz a 2020 hárommal osztva 1 maradékot ad, 1 pont

így a keresett tag: $a_{2020}=\frac{1}{2}$. 1 pont

Egy hármas csoport összege $\frac{1}{2}+2+(-1)=1{,}5$. 1 pont

673 darab hármas csoport és a maradék $\frac{1}{2}$ összege 1010. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Oldjuk meg a következő egyenletet a pozitív egész számpárok halmazán!

$$1 = \frac{2036}{ab} + \frac{5}{a} - \frac{3}{b}$$ **7 pont**

Megoldás. Az egyenletet ekvivalens átalakításokkal a következő alakra hozhatjuk:

$$(a-5)(b+3) = 2021.$$ 2 pont

A 2021 prímtényezős felbontása $2021 = 43 \cdot 47$. 1 pont

Az $(a-5)$ és $(b+3)$ tényezőkre a lehetséges számpárok:

$(1;2021), (43;47), (47;43), (2021;1), (-1;-2021), (-43;-47), (-47;-43), (-2021;-1)$. 1 pont

A negatív tényezők, valamint a $(2021;1)$ rendezett számpár nem adnak megoldást a pozitív számok halmazán. 1 pont

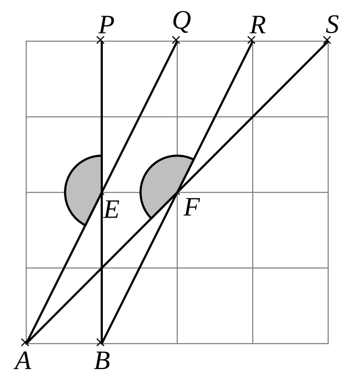
A lehetséges megoldások: $a_1 = 6$; $b_1 = 2018$; $a_2 = 48$; $b_2 = 44$; $a_3 = 52$; $b_3 = 40$. 2 pont

Összesen: **7 pont**

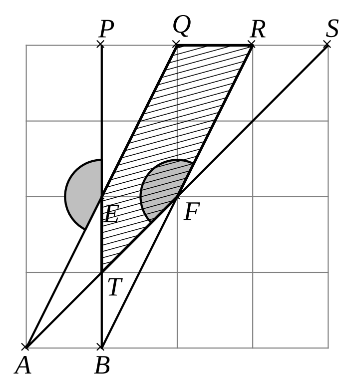
5. A 4×4-es méretű négyzetrácson felvettük az A, B, E, F, P, Q, R, S pontokat a mellékelt ábra szerint.

$(A(0;0), B(1;0), E(1;2), F(2;2), P(1;4), Q(2;4), R(3;4), S(4;4))$

Mekkora az $AEP\sphericalangle$ és az $AFR\sphericalangle$ szögek összege? **7 pont**



Megoldás. A mellékelt ábrát és az ábrába berajzolt $ETFRQ$ ötszöget fogjuk használni. 1 pont



Jelöljük az $(1;1)$ pontot T-vel. Ekkor $TEQ\sphericalangle = AEP\sphericalangle$, mivel csúcsszögek. 1 pont

Továbbá $ETF\sphericalangle = 45^\circ$ a megfelelő ETF derékszögű egyenlő szárú háromszög miatt, valamint A, T és F pontok egy egyenesre esnek, és így $AFR\sphericalangle = TFR\sphericalangle$. 1 pont

Másfelől EQ és FR párhuzamossága miatt

$$EQR\sphericalangle + QRF\sphericalangle = 180^\circ.$$ 2 pont

Mivel az $ETFRQ$ rácsötszög belső szögeinek összege 540°, 1 pont

rövid számolással adódik, hogy

$$AEP\sphericalangle + AFR\sphericalangle = QET\sphericalangle + TFR\sphericalangle = 540^\circ - (180^\circ + 45^\circ) = 315^\circ.$$ 1 pont

Összesen: **7 pont**