**Bolyai János**
**Matematikai Társulat**

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

# 2020/2021-es tanév

## Haladók I. kategória 2. forduló

### Megoldások és javítási útmutató

**1.** Az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ halmaznak hány olyan legalább kételemű részhalmaza van, amelyben az elemek szorzata osztható 10-zel? **7 pont**

**Megoldás.** Az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ halmaznak $2^9 = 512$ darab olyan részhalma van, amiben benne van a 10, ezek között egy van, ami nem kételemű, ez a $\{10\}$. A többi 511 darab legalább két elemű, és osztható 10-zel. 1 pont

Azt számoljuk ki, hogy a többi $2^9 - 1 = 511$ számú részhalmaz, azaz az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ halmaz nem üres részhalmazai között hány olyan van, amelyekben az elemek szorzata nem osztható 10-zel. 1 pont

Van $2^5$-1 olyan, amelyekben a számok szorzata nem osztható 2-vel, ezek az $\{1;3;5;7;9\}$ halmaz nem üres részhalmazai. 1 pont

Van $2^8 - 1$ olyan, amelyekben a számok szorzata nem osztható 5-tel, ezek az $\{1;2;3;4;6;7;8;9\}$ halmaz nem üres részhalmazai. 1 pont

És van $2^4 - 1$ olyan, amelyekben a számok szorzata nem osztható 2-vel és 5-tel sem, ezek az $\{1;3;7;9\}$ halmaz nem üres részhalmazai. 1 pont

Tehát az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ halmaz nem üres részhalmazai között

$$2^5 - 1 + 2^8 - 1 - (2^4 - 1) = 271$$

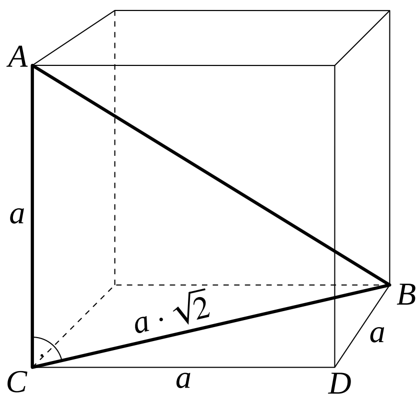
olyan van, amelyek nem oszthatók 2-vel vagy 5-tel, és $511 - 271 = 240$ olyan van, amelyek oszthatók 2-vel és 5-tel is, azaz oszthatók 10-zel. 1 pont

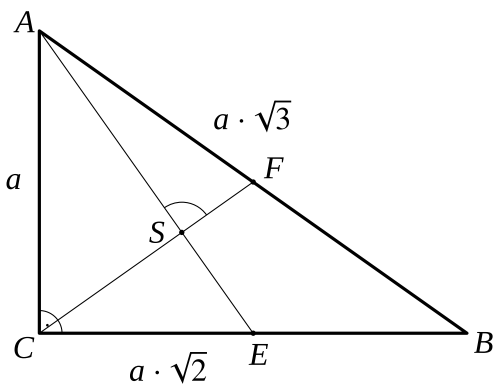
Végül az $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9;10\}$ halmaznak $511 + 240 = 751$ olyan legalább kételemű részhalmaza van, amelyben az elemek szorzata osztható 10-zel. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**2.** Legyen egy derékszögű háromszög egyik befogója egy kockának éle, a másik befogója pedig ugyanannak a kockának lapátlója. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög valamelyik két súlyvonala merőleges egymásra. **7 pont**

**Megoldás.** Legyen a kocka élhossza $a$, a megfelelő éle és lapátlója $AC$ és $CB$ az ábra szerint.




A $CB$ lapátló egy $a$ oldalú egyenlő szárú, derékszögű háromszög átfogója, ezért a Pitagorasz-tétel szerint $CB = a \cdot \sqrt{2}$.

Tekintsük most már csak az $ABC$ derékszögű háromszöget.

A háromszög $AB$ átfogójára szintén a Pitagorasz-tételt használva $AB = a \cdot \sqrt{3}$. 1 pont

Legyenek $CB$ és $AB$ oldalak felezőpontjai rendre $E$ és $F$, ekkor az $ABC$ háromszögben $CF$ és $AE$ súlyvonalak. Metszéspontjuk $S$, a háromszög súlypontja, amelyről tudjuk, hogy a súlyvonalakat a csúcstól számított 2 : 1 arányban osztja két részre. 1 pont

Írjuk fel az $ASF$ háromszög oldalainak hosszát.

Az $AE$ súlyvonal az $ACE$ derékszögű háromszögből Pitagorasz-tétellel számolható:

$$AE = \sqrt{AC^2 + CE^2} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4a^2 + 2a^2}{4}} = \frac{a}{2}\sqrt{6},$$

ahonnan $AS = \frac{2}{3}AE = \frac{a}{3}\sqrt{6}$. 1 pont

A Thalesz-tétel megfordítása miatt $CF$ súlyvonal az $ABC$ derékszögű háromszög köré írt körének sugara, azaz $CF = \frac{AB}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, ahonnan $SF = \frac{1}{3}CF = \frac{a}{6}\sqrt{3}$. 1 pont

$AF$ pedig az $AB$ oldal fele, azaz $AF = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. 1 pont

Mivel $AS^2 + SF^2 = \left(\frac{a}{3}\sqrt{6}\right)^2 + \left(\frac{a}{6}\sqrt{3}\right)^2 = a^2\frac{6}{9} + a^2\frac{3}{36} = a^2\frac{27}{36} = a^2\frac{3}{4} = AF^2$, 1 pont

így a Pitagorasz-tétel megfordítása értelmében az $ASF$ háromszögnek $S$-nél derékszöge van, amivel beláttuk az állítást. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**3.** Igazoljuk, hogy a nyolcjegyű 20202021 szám után pontosan egyféleképpen tudunk írni három újabb számjegyet úgy, hogy a kapott 11-jegyű szám osztható legyen 77-tel, 91-gyel és 143-mal is. **7 pont**

**1. megoldás.** $77 = 7 \cdot 11,\ \ 91 = 7 \cdot 13,\ \ 143 = 11 \cdot 13.$ 1 pont

$[77; 91; 143] = 1001.$ 1 pont

Azt kell bizonyítani, hogy a $\overline{20202021abc}$ alakú számok között pontosan egy 1001-gyel osztható van. 1 pont

A 11-es oszthatósági szabály miatt $11 \nmid 20202020999$ 1 pont

Mivel 1001-gyel osztva 1001 osztási maradék van, a skatulyaelv alapján 1 pont

a következő ezer szám között (amik a nekünk megfelelő számok) biztosan van 1001-gyel osztható, 1 pont

és pontosan egy darab van. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**2. megoldás.** $77 = 7 \cdot 11,\ \ 91 = 7 \cdot 13,\ \ 143 = 11 \cdot 13.$ 1 pont

$[77; 91; 143] = 1001.$ 1 pont

$20202021000 = 20181839 \cdot 1001 + 161.$ 1 pont

$1001 - 161 = 840.$ 1 pont

Tehát a 20202021840 szám osztható 1001-gyel. 1 pont

A következő 1001-gyel osztható szám, a 20202022841, már nem felel meg a feltételnek. 1 pont

Tehát pontosan egy ilyen szám van. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**4.** Az $x$, $y$ pozitív számokra teljesül, hogy $x^3 + y^3 = x - y$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $x^2 + y^2 < 1$. **7 pont**

**Megoldás.** Mivel $x$ és $y$ pozitív számok, azért $x^3 + y^3$ is pozitív, így szükségképpen $x > y$. 1 pont

$x^3 + y^3 > x^3 - y^3$ mindig teljesül, a jobb oldalt szorzattá alakítva, a bal oldalon pedig a feltételt alkalmazva:

$$x - y > (x - y)(x^2 + xy + y^2)$$

egyenlőtlenséghez jutunk. 2 pont

Az $x - y$ pozitív, ezért az ezzel való osztáskor az egyenlőtlenség iránya nem változik. 1 pont

$$1 > x^2 + xy + y^2$$ 1 pont

minthogy $x > 0$, $y > 0$, így $xy > 0$, tehát

$$1 > x^2 + y^2,$$

ami a bizonyítandó állítás. 2 pont

**Összesen:** **7 pont**