Haladók I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Mekkora lehet az xyz szorzat értéke, ha az x, y, z valós számok teljesítik a következő egyenleteket:

$$x + y + xy = 3 \tag{1}$$

$$y + z + yz = 8 \tag{2}$$

$$z + x + zx = 35 \tag{3}$$

7 pont

2. Mekkorák annak az ABC háromszögnek a szögei, amelynél a C csúcsból induló magasságvonal talppontjának a C csúcsból induló belső szögfelezőre vonatkozó tükörképe éppen a C-ből húzott súlyvonal felezőpontja? **7 pont**

3. Jelölje a_k a pozitív egész k szám négyzetgyökének egészekre való kerekítését. Mekkora n értéke, ha

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 2021?$$

7 pont

Megoldások és javítási útmutató

1. Mekkora lehet az xyz szorzat értéke, ha az x, y, z valós számok teljesítik a következő egyenleteket:

$$x+y+xy=3 \quad (1)$$
$$y+z+yz=8 \quad (2)$$
$$z+x+zx=35 \quad (3)$$

7 pont

1. megoldás. Minden egyenlethez 1-et hozzáadva a bal oldalak szorzattá alakíthatóak:

$$(x+1)(y+1)=2^2 \quad (1')$$
$$(y+1)(z+1)=3^2 \quad (2')$$
$$(z+1)(x+1)=6^2 \quad (3')$$

2 pont

Az egyenleteket összeszorozva: $(x+1)^2\cdot(y+1)^2\cdot(z+1)^2=36^2$.

Tehát

$$(x+1)(y+1)(z+1)=\pm 36.$$

1 pont

Ha $(x+1)(y+1)(z+1)=36$, akkor (mivel $x=-1$ vagy $y=-1$ vagy $z=-1$ nem ad megoldást) $(1')$, $(2')$, $(3')$-vel rendre osztva az összefüggést kapjuk, hogy:

$$z+1=9$$
$$x+1=4$$
$$y+1=1$$

1 pont

Ebből $x=3$, $y=0$, $z=8$, tehát $xyz=0$. 1 pont

Ha $(x+1)(y+1)(z+1)=-36$, akkor $(1')$, $(2')$, $(3')$-vel rendre osztva azt kapjuk, hogy:

$$z+1=-9$$
$$x+1=-4$$
$$y+1=-1$$

1 pont

Ebből $x=-5$, $y=-2$, $z=-10$, tehát $xyz=-100$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás.

$$x(y+1)=3-y. \quad (1)$$

Mivel $y=-1$ nem megoldás

$$x=\frac{3-y}{y+1}$$

2 pont

$$z(y+1)=8-y \quad (2)$$

$$z=\frac{8-y}{y+1}$$

1 pont

$$\frac{8-y}{y+1}+\frac{3-y}{y+1}+\frac{(8-y)(3-y)}{(y+1)^2}=35 \quad (3)$$

Ebből az alábbi egyenlethez jutunk:

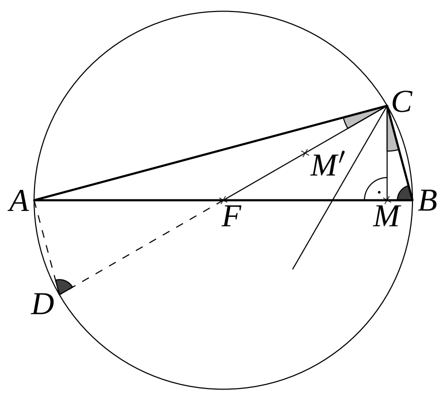
$$y^2 + 2y = 0$$ 2 pont

Megoldások: $y = -2$, $x = -5$, $z = -1$, ekkor $xyz = -100$

vagy $y = 0$, $x = 3$, $z = 8$, ekkor $xyz = 0$. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Mekkorák annak az ABC háromszögnek a szögei, amelynél a C csúcsból induló magasságvonal talppontjának a C csúcsból induló belső szögfelezőre vonatkozó tükörképe éppen a C-ből húzott súlyvonal felezőpontja? **7 pont**



1. megoldás. Először azt mutatjuk meg, hogy ha M magasság talppont szögfelezőre vonatkozó M' tükörképe az s_c súlyvonalra esik, akkor az ABC háromszögnek C-nél derékszöge van. Ehhez hosszabbítsuk meg a CF súlyvonalat az ABC háromszög köré írt köréig, és a kör és a súlyvonal (C-től különböző) metszéspontját jelöljük D-vel. $ADC\sphericalangle = ABC\sphericalangle = \beta$, hiszen azonos íven nyugvó kerületi szögek. 1 pont

Viszont mivel a belső szögfelezőre tükröztünk

$$ACD\sphericalangle = MCB\sphericalangle = 90^\circ - \beta$$

is igaz. Innen a DAC háromszögben $DAC\sphericalangle = 90^\circ$. 1 pont

Azaz ABC körülírt köre egyúttal CD szakasz Thalész-köre. Ennek középpontja egyfelől rajta van CD-n (a felezőpontja), másfelől rajta van az AB szakasz felezőmerőlegesén is. 1 pont

De AB felezőmerőlegesének és CD-nek a metszéspontja pontosan F, azaz AB felezőpontja egyúttal ABC köré írt körének középpontja, azaz $ACB\sphericalangle = 90^\circ$.

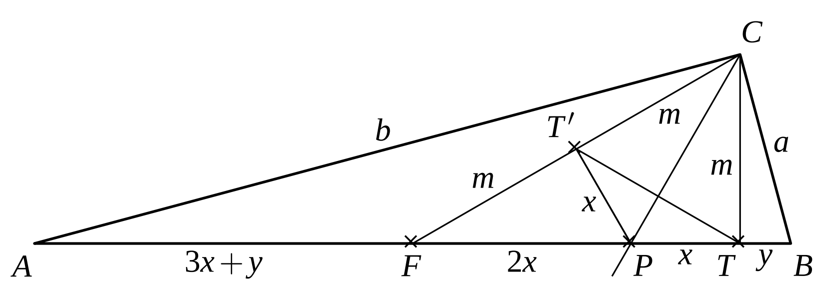
(Megjegyzés: AB felezőmerőlegese és CD a feladat feltételei alapján nem eshet egybe.) 1 pont

Másodjára vegyük észre, hogy FMC olyan derékszögű háromszög, amelynek MC befogója (a feltételek alapján) pontosan fele a CF átfogónak, azaz félszabályos. 1 pont

Innen $FCM\sphericalangle = 60^\circ$ és így $ACF\sphericalangle = MCB\sphericalangle = 15^\circ$. Innen azonnal adódik, hogy az ABC háromszög szögei: 15°, 75°, 90°. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás.



Legyen a C csúcshoz tartozó magasság m. A tükrözés miatt $CT' = m$, így $FT' = m$. De ekkor FTC háromszög félszabályos. Legyen $PT = x$. A tükrözés miatt $PT' = x$, így FPT' félszabályos háromszögben $FP = 2x$, valamint $m = \sqrt{3}x$.

Pitagorasz tételét felírva ATC és TBC derékszögű háromszögekben:

$$\begin{aligned} b^2 &= (6x+y)^2 + 3x^2 \\ a^2 &= y^2 + 3x^2 \end{aligned}$$ 1 pont

Ezekből $\dfrac{b^2}{a^2} = \dfrac{39x^2+12xy+y^2}{3x^2+y^2}$. A szögfelező-tétel alapján:

$$\frac{b}{a} = \frac{5x+y}{x+y}$$ 1 pont

Ebből

$$\frac{b^2}{a^2} = \frac{25x^2+10xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$$

Tehát

$$\frac{39x^2+12xy+y^2}{3x^2+y^2} = \frac{25x^2+10xy+y^2}{x^2+2xy+y^2}$$

x^2-tel egyszerűsítünk és vezessük be a $z = \dfrac{y}{x}$ új ismeretlent:

$$\frac{39+12z+z^2}{3+z^2} = \frac{25+10z+z^2}{1+2z+z^2}$$

$$39+78z+39z^2+12z+24z^2+12z^3+z^2+2z^3+z^4 = 75+30z+3z^2+25z^2+10z^3+z^4$$

$$4z^3+36z^2+60z-36 = 0$$

$$z^3+9z^2+15z-9 = 0$$ 1 pont

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy a $z = -3$ megoldása az egyenletnek, így a bal oldalon $z+3$ kiemelhető: $(z+3)\left(z^2+6z-3\right) = 0$. Így az egyenlet megoldásai: $z = -3$, $z = -3-2\sqrt{3}$, $z = -3+2\sqrt{3}$.

Ezek közül csak a $z = -3+2\sqrt{3}$ lehet a feladat megoldása, így

$$\frac{y}{x} = 2\sqrt{3}-3, \qquad y = \left(2\sqrt{3}-3\right)x$$ 2 pont*

Ekkor $AF = FB = 3x+y = 2\sqrt{3}x$ és $FC = 2m = 2\sqrt{3}x$, tehát $AF = FB = FC$, azaz a Thalész-tétel értelmében $BCA = 90^\circ$, AFC egyenlő szárú háromszögből pedig $CAB = 15^\circ$, így $ABC = 75^\circ$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. A *-gal jelölt 2 pontot például az alábbi gondolatmenetekért is megkaphatja a versenyző:

Vezessük be a v új ismeretlent, ahol $z = v - 3$.

$$(v-3)^3 + 9(v-3)^2 + 15(v-3) - 9 = 0$$
$$v^3 - 9v^2 + 27v - 27 + 9v^2 - 54v + 81 + 15v - 45 - 9 = 0$$
$$v^3 - 12v = 0$$

Az egyenlete gyökei: $v = 0$, $v = -2\sqrt{3}$, $v = 2\sqrt{3}$, így $z = -3$, $z = -2\sqrt{3} - 3$, $z = 2\sqrt{3} - 3$.

$$\frac{y}{x} = 2\sqrt{3} - 3$$
$$y = \left(2\sqrt{3} - 3\right) x$$

vagy

Csoportosítsuk át az egyenlet bal oldalát:

$$z^3 + 6z^2 + 3z^2 - 3z + 18z - 9 = 0$$
$$z^3 + 6z^2 - 3z + 3z^2 + 18z - 9 = 0$$
$$z\left(z^2 + 6z - 3\right) + 3\left(z^2 + 6z - 3\right) = 0$$
$$(z+3)\left(z^2 + 6z - 3\right) = 0$$

így $z = -3$, $z = -2\sqrt{3} - 3$, $z = 2\sqrt{3} - 3$.

$$\frac{y}{x} = 2\sqrt{3} - 3$$
$$y = \left(2\sqrt{3} - 3\right) x$$

3. Jelölje a_k a pozitív egész k szám négyzetgyökének egészekre való kerekítését. Mekkora n értéke, ha

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = 2021?$$ **7 pont**

Megoldás. Először belátjuk, hogy két szomszédos négyzetszám között pontosan a számok fele lesz lefelé, másik fele fölfelé kerekítve. Ha például $m^2 \leq k_i \leq (m+1)^2$, akkor ezen $2m+2$ darab k_i szám négyzetgyökei közül $m+1$ darab lesz lefelé és $m+1$ darab fölfelé kerekítve.

k_i négyzetgyöke akkor lesz lefelé, (m-re) kerekítve, ha $m^2 \leq k_i \leq (m+0{,}5)^2$, 1 pont

azaz $m^2 \leq m^2 + m + 0{,}25$. Ez $m+1$ darab szám (m^2, $m^2+1, \ldots, m^2+m$), a maradék $m+1$ darab pedig fölfelé lesz kerekítve. 1 pont

Az előzőek szerint pontosan m-re kerekítve magán az m^2 szám négyzetgyökén kívül a nála nagyobb számok közül m darab, a nála kisebbek közül $m-1$ darab lesz. Ez tehát $2m$ darab szám, 1 pont

ezért

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{a_n},$$ 1 pont

azaz az m nevezőjű tagok összege: $\frac{1}{m} \cdot 2m = 2.$ 1 pont