Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2020/2021-es tanév

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Hányféle olyan háromjegyű szám létezik, amelyben a számjegyek összege és szorzata egyenlő? **6 pont**

Megoldás. A számban nem szerepelhet a 0, hiszen akkor a számjegyek szorzata 0 lenne. 1 pont

Legyen a számban szereplő legnagyobb számjegy x.

Ekkor a számjegyek összege legfeljebb $3x$, így szorzata is legfeljebb $3x$, tehát a másik két számjegy szorzata legfeljebb 3. Tehát a másik két számjegy az 1, 1; 1, 2; 1, 3 lehetőségek közül választható ki. 2 pont

x, 1, 1 számjegyek esetén $x+1+1 = x \cdot 1 \cdot 1$; $\quad x+2 = x$, ez lehetetlen.

x, 1, 2 számjegyek esetén $x+1+2 = x \cdot 1 \cdot 2$; $\quad x+3 = 2x$; $\quad x = 3$, ez jó megoldás.

x, 1, 3 számjegyek esetén $x+1+3 = x \cdot 1 \cdot 3$; $\quad x+4 = 3x$; $\quad x = 2$, ez ellentmond annak, hogy x a legnagyobb számjegy. 1 pont

Tehát a számban szereplő számjegyek az 1, 2, 3, 1 pont

belőlük 6 háromjegyű szám készíthető, azaz 6 olyan háromjegyű szám van, amelyben a számjegyek összege és szorzata egyenlő. 1 pont

Összesen: 6 pont

Megjegyzés. Ha a tanuló megtalálja az 1, 2, 3 számjegyeket és a belőlük képezhető hat számot, de nem indokolja, hogy nincs több megoldás, akkor összesen 2 pontot kaphat.

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész n szám, amelyre igaz, hogy n darab számot kiválasztva az első 2020 pozitív egész szám közül, biztosan lesz köztük kettő, amelyek különbsége 4? **6 pont**

Megoldás. A számhalmaz, amiből a számokat kiválasztjuk: $A = \{1;2;3;\ldots;2020\}$.

Ha két egész szám különbsége 4, akkor megegyezik a 4-es maradékuk, ezért érdemes a 4-es maradékokat vizsgálni. Mivel 2020 osztható 4-gyel, ezért 505-505 darab 4-gyel osztva 0, 1 , 2, illetve 3 maradékot adó pozitív egész van 2020-ig. 1 pont

Ha a halmaz 1013 elemét választjuk ki, akkor (a skatulyaelv alapján) biztosan lesz olyan 4-es maradék, amiből legalább 254 fordul elő. 1 pont

Ekkor viszont biztosan lesz két olyan szám, amelyek különbsége 4, hiszen ellenkező esetben legalább 8 lenne köztük a különbség, és emiatt a legkisebb és legnagyobb között legalább $253 \cdot 8 = 2024$ lenne a különbség, ami nem lehet. 1 pont

Az A halmazból kiválasztható 1012 elem úgy, hogy ne legyen köztük két olyan, amelyek különbsége 4. 1 pont

Vegyük a $8k+m$ alakú számokat, ahol $k = 0, 1, 2, \ldots, 252$, illetve $m = 1, 2, 3, 4$. Könnyen belátható, hogy ez a konstrukció megfelelő. 1 pont

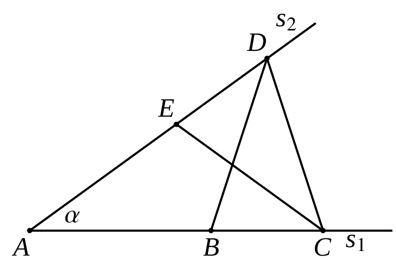
Tehát a legkisebb megfelelő n érték az 1013. 1 pont

Összesen: **6 pont**

3. Egy szög csúcsa az A pont, szárai s_1 és s_2. Felvesszük a szög s_1 szárán a B, C, az s_2 szárán a D, E pontokat úgy, hogy $AB = BD = DC = CE = EA$. Hány fokos a szög? **6 pont**

Megoldás.

Ábra: 1 pont



Az ABD és az AEC háromszögek egybevágó egyenlő szárú háromszögek, mert a száraik egyenlő hosszúak, és az egyik alapon nyugvó szögük (α) egyenlő. Ebből következik, hogy a szögeik

$$BAD\sphericalangle = BDA\sphericalangle = EAC\sphericalangle = ECA\sphericalangle = \alpha,$$

valamint $AEC\sphericalangle = ABD\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$. 2 pont

Ez utóbbi két szög kiegészítő szöge, $DEC\sphericalangle$ és $CBD\sphericalangle = 2\alpha$. ECD és BDC egybevágó egyenlő szárú háromszögek, így a szögeik $DEC\sphericalangle = EDC\sphericalangle = CBD\sphericalangle = BCD\sphericalangle = 2\alpha$. 2 pont

Az ACD háromszögben $ACD\sphericalangle = ADC\sphericalangle = 2\alpha$, és mivel $CAD\sphericalangle = \alpha$, így a háromszögben a belső szögek összege $5\alpha = 180^\circ$, azaz $\alpha = 36^\circ$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

4. Adjuk meg az összes olyan n pozitív egész számot, amelyre teljesül, hogy ha az n, $n+4$ és $n+8$ számok pozitív osztóinak számát összeadjuk, hatot kapunk eredményül. (Például $n = 10$ esetén a 10; 14; 18 számhármasnál az osztók számának összege $4+4+6 = 14$.) **6 pont**

Megoldás. Megmutatjuk, hogy összesen két ilyen pozitív egész van: $n = 1$, valamint $n = 3$.

$n = 1$ megoldás, mert az 1; 5; 9 számhármast tekintve az osztók számának összege $1+2+3 = 6$. 1 pont

Ha $n > 1$, akkor osztóinak száma legalább kettő, és pontosan akkor kettő, ha n prím. 1 pont

Ha $n > 1$ esetén teljesül, hogy az n, $n+4$ és $n+8$ számok pozitív osztóinak összege 6, akkor n, $n+4$ és $n+8$ mind prímek. 1 pont

Az n, $n+4$ és $n+8$ számok csak akkor lehetnek mind prímek, ha $n = 3$, hiszen bármilyen n pozitív egész szám esetén a három szám 3-mal vett osztási maradékai 0; 1; 2 vagy 1; 2; 0 vagy 2; 0; 1, azaz közülük pontosan egy szám osztható 3-mal. Ez a 3-mal osztható szám csak akkor lehet prím, ha maga a 3. Mivel n pozitív, így az $n+4$ és $n+8$ nagyobb, mint 3. 1 pont

$n = 3$ valóban megoldás, hiszen a 3; 7; 11 számhármas minden tagja prím, tehát az osztók számának összege valóban $2+2+2 = 6$. 1 pont

Tehát két megoldás van: $n = 1$, valamint $n = 3$. 1 pont

Összesen: **6 pont**