Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2020/2021-es tanév

Kezdők I–II. kategória 2. és III. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Határozzuk meg az összes pozitív egész n számot, amely esetén $4n^2+3n+7$ négyzetszám. **6 pont**

2. Az ABC háromszögben $AB=3\cdot BC$. P és Q az AB oldal azon pontjai, amelyekre $AP=PQ=QB$. Legyen F az AC oldal felezőpontja. Határozzuk meg a $QFP\sphericalangle$ nagyságát. **8 pont**

3. A tic-tac-toe (vagy ix-ox) játékban két játékos felváltva tesz $\times$, illetve $\bigcirc$ jelet egy 3×3-as táblára. Az nyer, akinek sikerül egy vonalban három azonos jelet elhelyeznie, vízszintes, függőleges vagy átlós irányban. Hány különböző olyan játékmenet létezik, amelyben $\times$ kezd, és a játszma döntetlennel végződik? (Két játékmenetet akkor tekintünk különbözőnek, ha valamelyik lépésben máshova kerül jel a két játékban.) **8 pont**

4. Egy teniszversenyen vegyesen junior és felnőtt korú versenyzők is indultak. Minden résztvevő a többi játékos mindegyikével pontosan egy mérkőzést játszott. A torna végén kiderült, hogy mindenki elveszítette legalább egyik mérkőzését, és minden felnőtt eredménylistájában különböző számú vereség szerepelt. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan junior korú versenyző, aki felnőtt ellen is szerzett győzelmet. **8 pont**

5. Egy $n\times n$-es táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írtunk. A táblán az alábbi változtatások hajthatók végre:

- egy tetszőleges sor minden elemét megszorozzuk 2-vel,
- egy tetszőleges oszlop minden eleméből kivonunk 1-et.

Az engedélyezett lépések tetszőleges számú alkalmazásával elérhető-e, hogy a táblázat minden mezőjébe 0 kerüljön? **10 pont**