Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2020/2021-es tanév

Kezdők I–II. kategória 2. és III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozzuk meg az összes pozitív egész n számot, amely esetén $4n^2+3n+7$ négyzetszám. **6 pont**

1. megoldás. Nyilvánvaló, hogy minden n pozitív egész szám esetén:

$$(2n)^2 = 4n^2 < 4n^2+3n+7.$$ 1 pont

Továbbá minden n pozitív egész szám esetén $4n^2+3n+7 < 4n^2+8n+4 = (2n+2)^2$, 1 pont

hiszen az egyenlőtlenséget ekvivalens módon átrendezve a $3 < 5n$ egyenlőtlenséget kapunk, ami minden pozitív egész n-re igaz. 1 pont

Ezért, mivel a $(2n)^2 < 4n^2+3n+7 < (2n+2)^2$ fennáll minden pozitív egész n esetén, 1 pont

így a kifejezés csak úgy lehet négyzetszám, ha $4n^2+3n+7 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$. 1 pont

Ezt az egyenletet rendezve és megoldva kapjuk hogy $n = 6$. Ekkor $4 \cdot 36 + 3 \cdot 6 + 7 = 169 = 13^2$, valóban négyzetszám. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. megoldás. Tegyük fel, hogy van olyan k egész szám, amelyre $4n^2+3n+7 = k^2$. 1 pont

Rendezve a kifejezést $3n+7 = k^2-4n^2 = (k-2n)(k+2n)$, vagyis $(3n+7)$-et két természetes szám szorzataként kell felírni. 1 pont

Mivel $k-2n < k+2n$, vizsgáljuk, milyen lehetséges értékek jönnek szóba $(k-2n)$-re.

Ha $k-2n = 1$, azaz $k+2n = (k-2n)+4n = 1+4n$, akkor $3n+7 = (k-2n)(k+2n) = 4n+1$, ami csak akkor teljesül, ha $n = 6$, és ez valóban megoldása a feladatnak. 1 pont

Tovább vizsgálódva nem találunk több megoldást, ezért felírjuk általánosan:

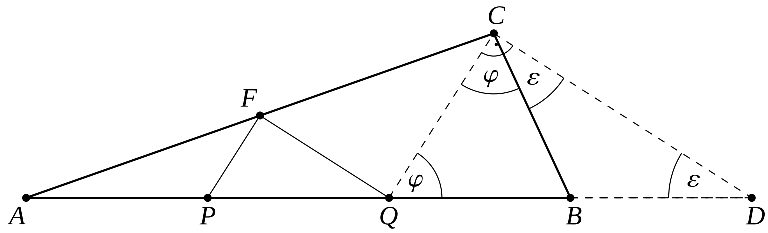
Ha $k-2n \geq 2$, akkor $k+2n = (k-2n)+4n \geq 2+4n$, ezért a szorzatuk legalább $4+8n$. Ezek szerint annak kellene teljesülnie, hogy $3n+7 \geq 4+8n$, azaz hogy $3 \geq 5n$. 2 pont

Mivel azonban $n \geq 1$, ez semmilyen n-re sem teljesülhet. Tehát az egyetlen megoldás az $n = 6$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Az ABC háromszögben $AB = 3 \cdot BC$. P és Q az AB oldal azon pontjai, amelyekre $AP = PQ = QB$. Legyen F az AC oldal felezőpontja. Határozzuk meg a $QFP\sphericalangle$ nagyságát. **8 pont**

Megoldás.



Hosszabbítsuk meg a háromszög AB oldalát a B csúcson túl a BC oldal hosszával, és a kapott pontot jelöljük D-vel. 2 pont

Ekkor a feladat feltételei alapján:

$$AP = PQ = QB = BD = BC.$$

A QBC és CBD egyenlő szárú háromszögek alapján:

$$BCQ\sphericalangle = CQB\sphericalangle = \varphi \qquad \text{és} \qquad DCB\sphericalangle = BDC\sphericalangle = \varepsilon.$$

Ezt figyelembe véve a QDC háromszögben:

$$180^\circ = BDC\sphericalangle + DCB\sphericalangle + BCQ\sphericalangle + CQB\sphericalangle = 2(DCB\sphericalangle + BCQ\sphericalangle) = 2DCQ\sphericalangle,$$

amiből $DCQ\sphericalangle = 90^\circ$. 3 pont

(Ugyanehhez az eredményhez úgy is eljuthatunk, ha észrevesszük, hogy $BQ = BD = BC$ alapján B a QDC háromszög körülírt körének középpontja. Ekkor a Thálesz-tétel megfordítása alapján adódik, hogy a QDC háromszög derékszögű.)

Az AQC háromszögben PF középvonal, ezért $PF \parallel QC$. Hasonlóképpen az ADC háromszögben QF középvonal, emiatt $QF \parallel DC$. 2 pont

A megállapított párhuzamosságok figyelembevételével $QFP\sphericalangle = DCQ\sphericalangle = 90^\circ$ (egyállású szögek). Tehát a keresett szög nagysága 90°. 1 pont

Összesen: **8 pont**

3. A tic-tac-toe (vagy ix-ox) játékban két játékos felváltva tesz $\times$, illetve ◯ jelet egy 3×3-as táblára. Az nyer, akinek sikerül egy vonalban három azonos jelet elhelyeznie, vízszintes, függőleges vagy átlós irányban. Hány különböző olyan játékmenet létezik, amelyben $\times$ kezd, és a játszma döntetlennel végződik? (Két játékmenetet akkor tekintünk különbözőnek, ha valamelyik lépésben máshova kerül jel a két játékban.) **8 pont**

Megoldás. Először számoljuk össze, hogy hányféle döntetlen „végállás” van!

Ekkor a játék során összesen 5 darab $\times$ és 4 darab ◯ jel kerül a táblára.

×	◯	◯
◯	×	×
×	×	◯

1. ábra

×	◯	×
◯	◯	×
×	×	◯

2. ábra

×	×	◯
◯	◯	×
×	×	◯

3. ábra

Ha $\times$ van középen, akkor a maradék négy $\times$ jel közül csak pontosan kettő kerülhet sarokra és pontosan kettő oldalra, hiszen ellenkező esetben lenne két „szemközti” (a középpontra szimmetrikusan elhelyezkedő) $\times$. Sem a két sarokban, sem a két oldalon elhelyezkedő $\times$ nem lehet egymással szemközti. Továbbá az oldalakon elhelyezkedő $\times$ jelek közül egyik sem kerülhet a sarkokon elhelyezkedő $\times$ jelek közé. Ezek alapján csak az 1. ábrán látható, vagy az abból egybevágósági transzformációval megkapható elrendezés lehetséges. A sarkokba négyféleképpen kerülhet a két $\times$, a maradék két $\times$ helyét ezután még kétféleképpen választhatjuk ki. Ez eddig tehát $4 \cdot 2 = 8$ lehetséges végállás. 2 pont

Ha $\bigcirc$ van középen, akkor a maradék három $\bigcirc$ jelből egy vagy kettő kerülhet a sarokba. Az előbbi esetben csak a 2. ábrán látható, illetve azzal egybevágó elrendezések lehetségesek. Ilyenből is 4 van, hiszen a $\bigcirc$ jelet tartalmazó sarokkal nem érintkező oldalakra mindenképpen kell kerülnie egy-egy $\bigcirc$ jelnek ahhoz, hogy ne legyen három $\times$ egy vonalban. Ilyen elrendezésből összesen 4 van. A fentiekhez hasonlóan gondolkodva látható, hogy amikor kettő $\bigcirc$ jel van a sarokban, akkor pedig csak a 3. ábrán látható, illetve azzal egybevágó elrendezések lehetségesek, ilyenből is 4 van. 2 pont

Így összesen $8+4+4 = 16$ lehetséges végállás van. 1 pont

Adott végállásba $5! \cdot 4! = 2880$-féleképpen lehet eljutni (csak a két játékos lépéseinek sorrendjét változtathatjuk meg). 1 pont

Összesen tehát a $16 \cdot 2880 = 46\,080$ döntetlennel végződő játékmenet létezik. 1 pont

Összesen: **8 pont**

4. Egy teniszversenyen vegyesen junior és felnőtt korú versenyzők is indultak. Minden résztvevő a többi játékos mindegyikével pontosan egy mérkőzést játszott. A torna végén kiderült, hogy mindenki elveszítette legalább egyik mérkőzését, és minden felnőtt eredménylistájában különböző számú vereség szerepelt. Bizonyítsuk be, hogy volt olyan junior korú versenyző, aki felnőtt ellen is szerzett győzelmet. **8 pont**

Megoldás. Legyenek a versenyen résztvevő juniorok $j_1, j_2, \ldots, j_n$ ($n \in \mathbb{N}^+$), a felnőttek pedig $f_1, f_2, \ldots, f_m$ ($m \in \mathbb{N}^+$), és a feladat állításával ellentétesen tegyük fel, hogy a juniorok egyike sem nyert a felnőttek ellen mérkőzést 1 pont

Ekkor a felnőttek mindegyike a vereségeit csak azonos korosztályhoz tartozó társai ellen szerezhette. 1 pont

Minden felnőtt $m-1$ esetben játszott felnőtt vetélytársaival, ezért ezeken a mérkőzéseken 0, 1, 2, …, $m-1$ számú vereséget gyűjthetett össze. 2 pont

Mivel a feladat egyik feltétele kizárja azt az esetet, hogy valaki veretlenül zárja a tornát, ezért a felnőttek által szerzett vereségek száma csak az 1, 2, …, $m-1$ értékek közül kerülhetett ki. 2 pont

Mivel a vereségekre felsorolt értékek száma kisebb, mint a versenyen induló felnőttek száma, ezért a skatulya-elv értelmében kellett lennie legalább két olyan felnőttnek, akik azonos számú vereséget gyűjtöttek össze. Ellentmondáshoz jutottunk, így feltevésünkkel ellentétben volt olyan junior korú versenyző, aki a torna során felnőttet győzött le. 2 pont

Összesen: **8 pont**

5. Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írtunk. A táblán az alábbi változtatások hajthatók végre:

- egy tetszőleges sor minden elemét megszorozzuk 2-vel,
- egy tetszőleges oszlop minden eleméből kivonunk 1-et.

Az engedélyezett lépések tetszőleges számú alkalmazásával elérhető-e, hogy a táblázat minden mezőjébe 0 kerüljön? **10 pont**

Megoldás. Igen, a táblázat elemei nullázhatók, például a következő stratégiát követve: 1 pont

A táblázat elemeit oszloponként, tetszőleges sorrendben (például az első oszloptól indulva, balról jobbra) haladva változtatjuk nullára. Egy oszlop beállítása során másik oszlophoz nem nyúlunk, és csak akkor lépünk tovább a következőre, ha a jelenlegi oszlopnak már minden eleme nulla. A csupa 0 oszlop elemei sorműveletek hatására nem változnak meg. Tehát elég azt megmutatnunk, hogyan változtassuk nullára az első oszlop elemeit – a módszer működni fog a többire is. 2 pont

Kezdjük el csökkenteni az első oszlop elemeit mindaddig, míg valamelyik elem 1 nem lesz! 1 pont

Ha mindegyik elem 1, akkor még egy csökkentéssel nullázhatjuk az oszlopot. 1 pont

Ha vannak az oszlopban 1-es, illetve 1-estől különböző számok is, akkor duplázzuk meg az 1-esek sorát, majd csökkentsük az oszlopunk minden számát 1-gyel! 2 pont

Ezzel az oszlopban található 1-esesek továbbra is 1-esek maradnak, az összes többi szám viszont 1-gyel csökken. 2 pont

Mivel pozitív egész számok alkotják a táblázatot, ezért véges sok lépés után biztosan elérjük azt az állapotot, amikor az oszlop minden eleme 1 lesz. 1 pont

Ezután az oszlop elemeit eggyel csökkentve elértük, hogy minden elem nulla legyen.

Megjegyzés: Ha a tanuló csak konkrét példákon mutatja be a megoldást, általános elv leírása nélkül, akkor legfeljebb 2 pontot kaphat.

Összesen: **10 pont**