Megoldások és javítási útmutató

1. Hány zérushelye van a p valós szám értékétől függően az f függvénynek, ha

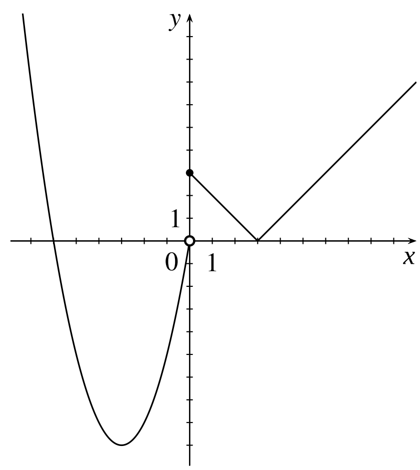
$$f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}, \qquad f\colon x \mapsto \begin{cases} x^2+6x+p, & \text{ha } x<0, \\ \sqrt{x^2-6x+9}-p, & \text{ha } x \ge 0? \end{cases}$$

10 pont

Megoldás. $x^2+6x+p=(x+3)^2-9+p.$ 1 pont

$\sqrt{x^2-6x+9}-p=\sqrt{(x-3)^2}-p=|x-3|-p.$ 1 pont

$p=0$ esetén megrajzolható az f függvény grafikonja (de nem elvárt):



ha $x<0$, akkor

p-től függően	$p \le 0$	$0<p<9$	$p=9$	$p>9$
a zérushelyek száma	1	2	1	0

2 pont

ha $x \ge 0$, akkor

p-től függően	$p<0$	$p=0$	$0<p\le 3$	$p>3$
a zérushelyek száma	0	1	2	1

2 pont

Összesítve:

p-től függően	$p<0$	$p=0$	$0<p\le 3$	$3<p<9$	$p=9$	$p>9$
a zérushelyek száma	1	2	4	3	2	1

4 pont

Összesen: **10 pont**

2. Egy orosházi szüret során az egyik nap 270 kg érett dinnyét szedtek le. A leszedett dinnyék egyikének a tömege sem haladta meg a 7 kg-ot. A gyümölcsöket 11 személy szállítja a teherautóra úgy, hogy egyikük sem visz egyszerre 30 kg-nál nagyobb terhet magával. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges tömegeloszlás esetén egy lépésben megoldható a dinnyék elszállítása! **10 pont**

Megoldás. Osszuk a leszedett dinnyéket két csoportba. Az első csoportba kerüljenek azok, amelyeknek a tömege meghaladja a 6 kg-ot, a másodikba pedig azok, amelyek tömege legfeljebb 6 kg.

Ekkor az első csoportba kerülő dinnyék száma biztosan kevesebb, mint $\frac{270}{6} = 45$, tehát ebbe a csoportba legfeljebb 44 elszállítandó dinnye kerülhet. Ha ezeket egyenletesen elosztjuk a szállítók között, akkor egy-egy embernek legfeljebb 4 gyümölcs juthat az első csoportból, és ezeknek össztömege személyenként legfeljebb $4 \cdot 7 = 28$ kg. Ez a tömeg nem haladja meg az egy ember által egy fordulóban elszállítható mennyiség felső határát. 2 pont

A feladat állításának további igazolásához indirekt bizonyítást alkalmazunk.

Tegyük fel, hogy az első csoportba tartozó dinnyéket már megfelelő módon elosztottuk a szállítók között, és kezdjük el a második csoportba tartozó dinnyéket is szétosztani a 11 ember között. Tegyük fel, hogy a 30 kg-os teherhatárt figyelembe véve egy $x \le 6$ kg tömegű dinnyét már egyik hordár csomagjához sem lehet hozzátenni anélkül, hogy meghaladnánk az előírást. 2 pont

Ekkor minden személyhez már több mint $(30-x)$ kg teher van társítva, 1 pont

és így a dinnyék össztömegére felírható, hogy

$$m_{\text{összes}} > 11(30-x)+x = 330-10x \ge 330-10\cdot 6 = 270.$$

3 pont

Ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy legalább az egyik szállítóhoz legfeljebb $(30-x)$ kg teher van társítva, így neki még odaadható az x kg tömegű dinnye anélkül, hogy túllépnénk a felső szállítási határt. 1 pont

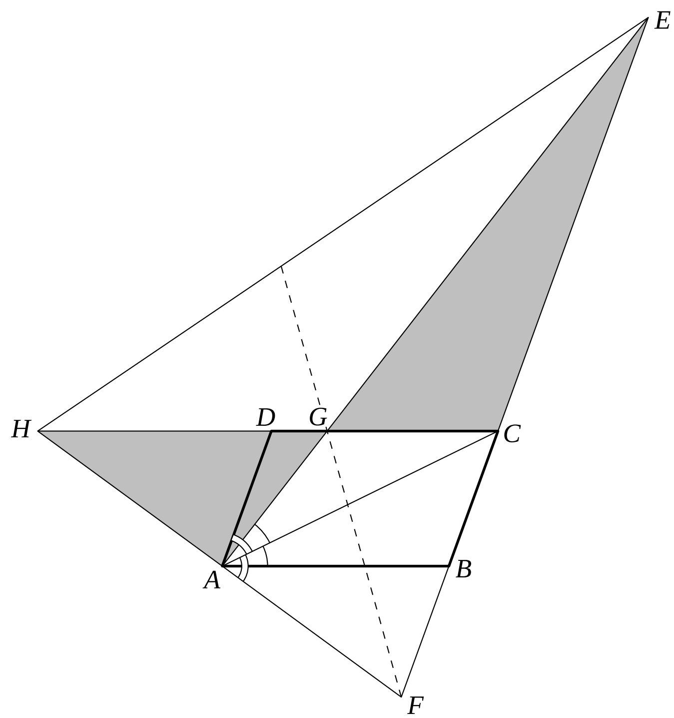
Mivel a fenti gondolatmenet lépésenként minden 2. csoportbeli dinnyére alkalmazható, ezért az összes gyümölcs elszállítása egy lépésben megvalósítható. 1 pont

Összesen: **10 pont**

3. Adott az $ABCD$ paralelogramma, amelynek szomszédos oldalai különböző hosszúságúak. A BC egyenesen kijelölünk olyan E és F pontokat, hogy AC felezze el az EAB és DAF szögeket. Legyen az AE és AF egyenesek CD oldalegyenessel alkotott metszéspontja rendre G és H.

Mutassuk meg, hogy az FG egyenes áthalad az EH szakasz felezőpontján! **10 pont**

Megoldás.



$AB \parallel CD$, ezért $ACG\sphericalangle = CAB\sphericalangle = GAC\sphericalangle$, így GAC egyenlő szárú háromszög, és $GA = GC$.

Hasonlóképpen $BC \parallel DA$, ahonnan $FCA\sphericalangle = DAC\sphericalangle = CAF\sphericalangle$, ezért FCA egyenlő szárú háromszög, és $FA = FC$. 2 pont

Így a GAF és GCF háromszögek egybevágók, mivel egyik oldaluk közös, másik két-két oldaluk pedig páronként egyenlő hosszúságú. 1 pont

A megállapított egybevágóság alapján:

$$GAF\sphericalangle = GCF\sphericalangle \quad \Rightarrow \quad HAG\sphericalangle = 180^\circ - GAF\sphericalangle = 180^\circ - GCF\sphericalangle = ECG\sphericalangle$$

1 pont

Másrészt $AGH\sphericalangle = CGE\sphericalangle$ (csúcsszögek). Így a korábban megállapított $GA = GC$ egyenlőség alapján $HAG\triangle \cong ECG\triangle$, $GH = GE$ és $HA = CE$. 2 pont

Továbbá $FH = FA + AH = FC + CE = FE$. 2 pont

Tehát a G és a H pontok is illeszkednek az EH szakasz felezőmerőlegesére, vagyis az EH szakasz felezőmerőlegese éppen az FG egyenes. 2 pont

Ezzel az állítást igazoltuk.

Összesen: **10 pont**