

## Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2020/2021-es tanév

### Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

#### Feladatok

1. Egy táblára felírtuk 1-től  $n$ -ig a természetes számokat ( $n$  legalább 2). Egy lépésben egyszerre két számot letörlünk, és helyettük a két szám (nemnegatív) különbségét írjuk fel. Addig folytatjuk ezt az eljárást, amíg már csak egy szám marad a táblán. Mi lehet az utolsónak kapott szám? **10 pont**
2. Adjunk elvi eljárást a háromszög megszerkesztésére, ha adott egy oldalának és a hozzá tartozó súlyvonalának a hossza, valamint a kerülete! **10 pont**
3. Ha  $n$  pozitív egész szám, akkor jelöljük  $a(n)$ -nel a legkisebb olyan  $n$ -nél nagyobb egész számot, amely felírható két négyzetszám összegeként. A két négyzetszám lehet egyenlő, és közülük az egyik lehet 0 is. Bizonyítsuk be, hogy minden  $n$  pozitív egész számra  
$$a(n) < n + 4n^{1/4}. \quad \mathbf{10\ pont}$$