Kezdők III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Egy táblára felírtuk 1-től n-ig a természetes számokat (n legalább 2). Egy lépésben egyszerre két számot letörlünk, és helyettük a két szám (nemnegatív) különbségét írjuk fel. Addig folytatjuk ezt az eljárást, amíg már csak egy szám marad a táblán. Mi lehet az utolsónak kapott szám? **10 pont**

2. Adjunk elvi eljárást a háromszög megszerkesztésére, ha adott egy oldalának és a hozzá tartozó súlyvonalának a hossza, valamint a kerülete! **10 pont**

3. Ha n pozitív egész szám, akkor jelöljük $a(n)$-nel a legkisebb olyan n-nél nagyobb egész számot, amely felírható két négyzetszám összegeként. A két négyzetszám lehet egyenlő, és közülük az egyik lehet 0 is. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész számra

$$a(n) < n + 4n^{1/4}.$$

10 pont

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy táblára felírtuk 1-től n-ig a természetes számokat (n legalább 2). Egy lépésben egyszerre két számot letörlünk, és helyettük a két szám (nemnegatív) különbségét írjuk fel. Addig folytatjuk ezt az eljárást, amíg már csak egy szám marad a táblán. Mi lehet az utolsónak kapott szám? **10 pont**

Megoldás. Két természetes szám összegének és különbségének a paritása azonos, ezért paritás szempontjából mindegy, hogy a két szám különbségét vagy összegét vizsgáljuk. Így végül az $n-1$ különbség helyett $n-1$ összeget, az összes szám összegét vizsgáljuk, 1 pont

ami pontosan akkor páratlan, ha páratlan sok páratlan szám van ($4k+1$ vagy $4k+2$ alakú az n). 1 pont

Az eljárás során semelyik felírt szám (így az utolsó) sem lehet sem negatív, sem n-nél nagyobb. 2 pont

A továbbiakban a paritással nem foglalkozunk, csak támaszkodunk a fentiekre.

Azt állítjuk, hogy minden megfelelő paritású, n-nél nem nagyobb nemnegatív egész számot megkaphatunk végeredményként. Erre több konstrukciót mutatunk.

1.1. konstrukció. Legyen $0 \le k \le n$ megfelelő paritású (egész) szám.

Írjuk fel a számokat csökkenő sorrendben. Két eset lehet:

$$\underbrace{n, n-1, \dots, k+1}_{\text{páros sok szám}}, k, k-1, \dots, 2, 1 \qquad \text{vagy} \qquad \underbrace{n, n-1, \dots, k+2}_{\text{páros sok szám}}, k+1, k, \dots, 2, 1$$

1 pont

Ez akkor is felírható, ha $k = n$ vagy $k = 0$, legfeljebb k-tól vagy $k+1$-től valamelyik irányban nem szerepel szám. 1 pont

Páros sok egymás után következő számból az egymás után következő szomszédos számok különbségét képezve csupa 1-est kaphatunk. 1 pont

Adott számnál kisebb számokból is kaphatunk csupa 1-est a legnagyobbtól kezdve a párosítást. Végül vagy $2-1=1$ az utolsó különbség, vagy $3-2=1$, és megmarad az 1-es. 1 pont

Az 1-esekből kivonások sorozatával előállítható a 0 vagy az 1, de mivel k paritása megfelelő, csak azt kaphatjuk, hogy a k mellett egy 0, $k+1$ mellett egy 1-es szerepel a táblán, és ezek különbsége mindkét esetben k. 1 pont

Ez a konstrukció csak akkor nem kivitelezhető, ha csak egy k-nál nagyobb szám van, kisebb meg egy sincs, azaz ha $k=1$, $k+1=n=2$, de akkor $2-1=1$ alapján állítható elő a $k=1$. 1 pont

1.2. konstrukció. Legyen $0 \le k \le n$ megfelelő paritású szám. Hagyjuk ki az n szám közül a k-t, illetve ha $k=0$, akkor ne hagyjunk ki számot. A cél a többi számból előállítani a 0-t. 1 pont

Nagyság szerint csökkenő sorba rendezve a számokat két eset lehet:

$$\underbrace{n, n-1, \ldots, k+1}_{\text{páros sok szám}}, k-1, \ldots, 2, 1 \qquad \text{vagy} \qquad \underbrace{n, n-1, \ldots, k+2}_{\text{páros sok szám}}, \underbrace{k+1, k-1}_{\text{2 a különbség}}, k-2, \ldots, 2, 1$$ 1 pont

Páros sok egymás után következő számból a megfelelő szomszédos számok különbségét képezve csupa 1-est kaphatunk. 1 pont

Adott számnál kisebb számokból is kaphatunk csupa 1-est a legnagyobbtól kezdve a párosítást. Végül vagy $2-1=1$ az utolsó különbség, vagy $3-2=1$, és megmarad az 1-es. 1 pont

A második esetben az egyetlen 2-esből egy 1-est kivonva (ha van 1-es) csupa 1-es marad. Az így megmaradt 1-esek száma páros, mert k paritása megfelelő. Az 1-esekből 0-kat, a 0-kból egyetlen 0-t kaphatunk, így végül $k-0=k$ marad a táblán. 1 pont

Ez a konstrukció nem kivitelezhető, ha $k=2$ és $n=k+1=3$, mert ekkor kapunk egy 2-es különbséget, de nem kapunk 1-est, ekkor $3-(2-1)$ módon állítható elő a 2; illetve ha $k=1$ és $k+1=n=2$, mert akkor csak egy szám marad, ekkor $2-1=1$ adja a kívánt eredményt. 1 pont

Megjegyzés. Mindkét konstrukciót szétbonthatjuk esetekre n 4-es osztási maradéka szerint, de akkor minden esetben külön vizsgálni kell az egyes nem általánosan tárgyalható értékeket (pl. $k=0$, $k=n$, illetve $n=3$ és $k=2$ vagy $n=2$ és $k=1$), ezek nélkül a megoldás hiányos. Az erre kapható 6 pont arányosan csökkenthető.

2.1. konstrukció. Alkalmazzunk teljes indukciót n-ről $n+1$-re. 2-re nyilván igaz az állítás. 1 pont

Tételezzük fel, hogy n-re igaz az állítás. Ekkor a kapható r végeredményekre: $0 \le r \le n$. 2 pont

Tekintsük most $n+1$-et. Mivel az n-re előálló végeredményeket $(n+1)$-ből kivonva a kapható különbségekre fennáll, hogy $1 \le (n+1)-r \le n+1$, így a 0-tól eltekintve minden (megfelelő paritású) végeredmény megkapható. 2 pont

A 0-t, ha n függvényében megkapható, például úgy állíthatjuk elő, hogy a legnagyobbtól a legkisebbig haladva szomszédos számok különbségét vesszük (1-esek), amelyekből már előáll a 0. 1 pont

2.2. konstrukció. Teljes indukciós gondolat n-ről $n+4$-re. Tetszőleges 4 egymást követő számból ($a+1$, $a+2$, $a+3$, $a+4$) előállítható a 0 ($= [(a+4)-(a+3)] - [(a+2)-(a+1)]$), a 2 ($= [(a+4)-(a+1)] - [(a+3)-(a+2)]$) és a 4 ($= (a+4) - \{(a+1) - [(a+3)-(a+2)]\}$). 2 pont

Így ha az első n számból előáll egy k, akkor az első $n+4$ számból előállítható k, $k+2$, $k+4$. 2 pont

$n=2$-re az 1, $n=3$-ra a 0 és a 2, $n=4$-re a 0, 2 és a 4, $n=5$-re az 1, 3, 5 állítható elő, vagyis tetszőleges n-re előáll az összes n-nél nem nagyobb nemnegatív megfelelő paritású szám. 2 pont

Összesen: **10 pont**

2. Adjunk elvi eljárást a háromszög megszerkesztésére, ha adott egy oldalának és a hozzá tartozó súlyvonalának a hossza, valamint a kerülete! **10 pont**

Megoldás. Legyen c az adott oldal, s a hozzá tartozó súlyvonal hossza, k pedig a kerület. Legyen a két ismeretlen oldal a és b. Definíció szerint

$$k = a + b + c,$$

a Stewart-tétel szerint pedig

$$s^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}.$$

(A Stewart-tétel ezen speciális esete könnyen levezethető abból, hogy egy paralelogrammában az átlók hosszának négyzetösszege megegyezik az oldalak hosszának négyzetösszegével.) Ekkor

$$\begin{aligned}(a-b)^2 &= (a+b)^2 - 4ab = (k-c)^2 - (2(a+b)^2 - 2(a^2+b^2)) \\ &= (k-c)^2 - (2(k-c)^2 - 4s^2 - c^2) = (2s)^2 + c^2 - (k-c)^2.\end{aligned}$$ 2 pont

Egy segédábrán szerkesszünk egy derékszögű háromszöget $2s$ és c befogókkal, a Pitagorasz-tétel értelmében az átfogója $d = \sqrt{(2s)^2 + c^2}$ lesz. Ezután egy másik segédábrán szerkesszünk egy derékszögű háromszöget, melynek az utoljára kapott d az átfogója, az egyik befogója pedig $k - c$ (megengedve azt az elfajuló esetet, amikor $d = k - c$). Ekkor a másik befogó lesz $|a - b|$, ismét a Pitagorasz-tétel szerint (az elfajuló esetben $|a - b| = 0$-t véve). Az $|a - b|$ és $a + b$ ismeretében a ás b megszerkesztése nyilvánvaló: $((a+b) + |a-b|)/2 = \max(a,b)$, $((a+b) - |a-b|)/2 =$ $= \min(a,b)$. 5 pont

Tehát ha a megszerkesztendő háromszög létezik, akkor egyértelműen szerkszthető, és a lépések azt is mutatják, melyek a létezésének a feltételei. Egyrészt szükséges, hogy

$$(a-b)^2 = (2s)^2 + c^2 - (k-c)^2 \geq 0,$$

azaz

$$(2s)^2 + c^2 \geq (k-c)^2$$

legyen. Másrészről kell, hogy $k - 2c > 0$ legyen (a háromszög-egyenlőtlenség alapján). Tehát a szerkeszthetőség (szükséges és elégséges) feltételét, melynek fennállása esetén a háromszög egyértelműen szerkeszthető a következő egyenlőtlenség-lánccal foglalhatjuk össze:

$$\sqrt{(2s)^2 + c^2} \geq k - 2c > 0.$$ 3 pont

Megjegyzés. Lehetnek más jó alternatív megoldások is. 7 pont jár más jó szerkesztésért, 3 pont a fentivel ekvivalens diszkusszióért.

Összesen: **10 pont**

3. Ha n pozitív egész szám, akkor jelöljük $a(n)$-nel a legkisebb olyan n-nél nagyobb egész számot, amely felírható két négyzetszám összegeként. A két négyzetszám lehet egyenlő, és közülük az egyik lehet 0 is. Bizonyítsuk be, hogy minden n pozitív egész számra

$$a(n) < n + 4n^{1/4}.$$ **10 pont**

Megoldás. Válasszuk meg x-et a lehető legnagyobb egésznek úgy, hogy $x^2 \le n$ legyen, majd y-t a lehető legkisebb pozitív egésznek úgy, hogy $y^2 > n - x^2$ is fennálljon. 3 pont

Ha $x^2 = n$, vagyis n négyzetszám, akkor $y = 1$, és $a(n) = n + 1$, ami nyilván teljesíti a feladat feltételeit. Ezért a a továbbiakban tegyük fel, hogy n nem négyzetszám, tehát $n - x^2 \ge 1$, vagyis $y \ge 2$. 1 pont

Az x, y számok megválasztása értelmében

$$x > n^{1/2} - 1$$

(különben x nem lenne maximális választás), tehát

$$x^2 > n - 2n^{1/2} + 1, \qquad n - x^2 < 2n^{1/2} - 1,$$

így

$$y < \sqrt{2}n^{1/4} + 1$$

(különben y nem lenne minimális választás). 3 pont

Ekkor $x^2 + y^2$ olyan n-nél nagyobb szám, amely felírható két négyzetszám összegeként, így $a(n) \le x^2 + y^2$. Továbbá y megválasztása miatt $x^2 + (y-1)^2 \le n$ is fennáll. Ezeket összefoglalva

$$x^2 + (y-1)^2 \le n < a(n) \le x^2 + y^2,$$

tehát

$$a(n) - n \le x^2 + y^2 - x^2 - (y-1)^2 = 2y - 1 < 2\sqrt{2}n^{1/4} + 1 < 4n^{1/4},$$

ahol az utolsó egyenlőtlenség azért áll fenn, mert $n^{1/4} \ge 1$ és $4 - 2\sqrt{2} > 1$, tehát

$$(4 - 2\sqrt{2})n^{1/4} > 1.$$

Ezzel a bizonyítás kész. 3 pont

Megjegyzés. A helyesség minden más jó bizonyítása szintén 6 pontot ér. Ha az x, y megválasztásából vagy a számolásból a 4-nél nagyobb konstans adódik az $n^{1/4}$ mellé, akkor, feltéve, hogy egyéb megállapítás helyes, 9 pont adható.

Összesen: **10 pont**