

## Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2021/2022-es tanév

### Haladók I. kategória 1. forduló

#### Feladatok

1. a) Hány olyan háromjegyű szám van, amelyből ha levonjuk a számjegyei összegét, akkor olyan számot kapunk, amely azonos számjegyekből áll?  
b) Van-e ezek között olyan, amelyhez hozzáadva a számjegyei összegét szintén olyan számot kapunk, amely azonos számjegyekből áll?

7 pont

2. Egy megbeszélésen üzletemberek vettek részt. Amikor üdvözölték egymást, kiderült, hogy már mindegyiküknek volt legalább egy ismerőse a többiek között, olyan viszont nem volt, aki mindenkint ismert volna. Sőt, az is kiderült, hogy volt olyan, aki a többiek közül pontosan egyet ismert, de olyan nem volt, akinek pontosan kettő vagy pontosan három ismerőse lett volna. Olyan viszont volt, aki a társaságnak több mint három tagját ismerte. Az ismeretség kölcsönös. Legalább hányan voltak jelen a megbeszélésen?

7 pont

3. Melyik nagyobb az alábbi két tört közül?

$$A = \frac{\overbrace{333 \dots 331}^{2021 \text{ db}}}{\underbrace{333 \dots 334}_{2021 \text{ db}}} \qquad B = \frac{\overbrace{222 \dots 221}^{2021 \text{ db}}}{\underbrace{222 \dots 223}_{2021 \text{ db}}}$$

7 pont

4. Legyenek  $a, b, c$  valós számok! Igazoljuk, hogy az

$$x^2 + (a - b)x + (b - c) = 0$$

$$x^2 + (b - c)x + (c - a) = 0$$

$$x^2 + (c - a)x + (a - b) = 0$$

másodfokú egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke!

7 pont

5. A  $C$ -nél derékszögű  $ABC$  háromszög  $CAB \sphericalangle$  és  $ABC \sphericalangle$  belső szögfelezői a  $BC$ , illetve a  $CA$  oldalakat rendre a  $P$  és a  $Q$  pontokban metszik.  $M$  és  $N$  pontok pedig a  $P$ -ből és a  $Q$ -ből az  $AB$  átmérőre állított merőlegesek talppontjai.

Mekkora  $MCN \sphericalangle$  pontos értéke?

7 pont