Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2021/2022-es tanév

Haladók I. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. *a)* Hány olyan háromjegyű szám van, amelyből ha levonjuk a számjegyei összegét, akkor olyan számot kapunk, amely azonos számjegyekből áll?
b) Van-e ezek között olyan, amelyhez hozzáadva a számjegyei összegét szintén olyan számot kapunk, amely azonos számjegyekből áll? **7 pont**

Megoldás. *a)* Legyen a keresett szám $\overline{abc}$ alakú.

$$\overline{abc} - a - b - c = 100a + 10b + c - a - b - c = 9(11a + b).$$ 1 pont

Az azonos számjegyekből álló szám 9-cel osztható, és legfeljebb háromjegyű, így a lehetőségek: 666, 333, 99. 1 pont

Ha $9(11a+b) = 666$, akkor $11a + b = 74$, így $a = 6$, $b = 8$.

Ekkor c bármilyen számjegy lehet, tehát ez 10 lehetőség. 1 pont

Ha $9(11a+b) = 333$, akkor $11a + b = 37$, így $a = 3$, $b = 4$

Ebben az esetben is 10 lehetőség van. 1 pont

Ha $9(11a+b) = 99$, akkor $11a + b = 11$, így $a = 1$, $b = 0$.

Ebben az esetben is 10 lehetőség van, tehát összesen 30 ilyen szám van. 1 pont

b) Mivel két egymást követő, azonos számjegyekből álló háromjegyű szám különbsége 111, ezért ez csak az utolsó esetben fordulhat elő. 1 pont

Ekkor $c = 5$, tehát a keresett szám a 105. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Egy megbeszélésen üzletemberek vettek részt. Amikor üdvözölték egymást, kiderült, hogy már mindegyiküknek volt legalább egy ismerőse a többiek között, olyan viszont nem volt, aki mindenkit ismert volna. Sőt, az is kiderült, hogy volt olyan, aki a többiek közül pontosan egyet ismert, de olyan nem volt, akinek pontosan kettő vagy pontosan három ismerőse lett volna. Olyan viszont volt, aki a társaságnak több mint három tagját ismerte. Az ismeretség kölcsönös. Legalább hányan voltak jelen a megbeszélésen? **7 pont**

Megoldás. Az nyilvánvaló, hogy öten eleve vannak, mert valakinek (A-nak) legalább négy ismerőse van (B, C, D, E). 1 pont

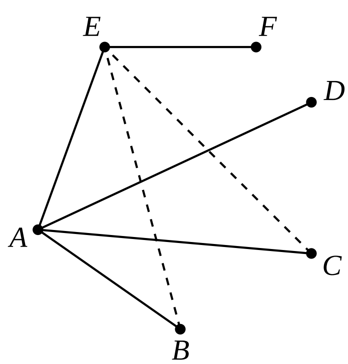
De ő nem ismer mindenkit, így kell legyen még legalább egy hatodik (F) ember is, akit A nem ismer.

Mivel F-nek is van legalább egy ismerőse, feltehetjük, hogy F ismeri E-t.

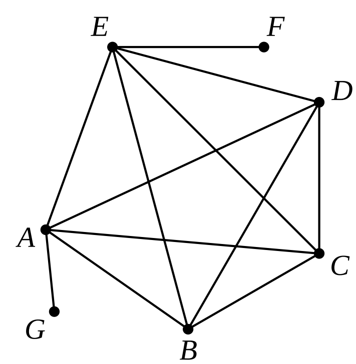
Tegyük fel, hogy A, B, C, D, E és F alkotják a társaságot, azaz a társaság hattagú. 1 pont

Így E-nek már két ismerőse is van (A és F), de akkor kell legyen legalább még kettő. Feltehetjük, hogy ezek B és C. 1 pont

Eddig tehát A-nak 4, E-nek 4, B-nek és C-nek 2-2, D-nek és F-nek 1-1 ismerőse van. (Az 1. ábrán látható, hogy A és E, illetve D és F szerepe felcserélhető.)



1. ábra



2. ábra

Pontosan egy ismerőse D-nek vagy F-nek van.

Mindkettőjüknek nem lehet pontosan egy ismerőse, mert akkor B és C az A-n és E-n kívül csak egymást ismerhetné, így mindkettőnek három ismerőse lenne, ami nem lehet. Tehát D és F közül csak az egyiknek van pontosan egy ismerőse van. 1 pont

Tegyük fel, hogy F-nek van pontosan egy ismerőse.

Ekkor viszont D-nek A-n kívül még három ismerőse kell legyen. F-et nem ismerheti, mert F csak E-t ismeri, tehát D három további ismerőse csak B, C és E lehet. Ekkor viszont E mindenkit ismer, ami ellentmond annak, hogy nincs olyan, aki mindenki mást ismer.

Tehát a társaság nem lehet hattagú. 1 pont

Héttagú viszont lehet, amint a 2. ábra mutatja. 2 pont

Összesen: **7 pont**

3. Melyik nagyobb az alábbi két tört közül?

$$A = \frac{\overbrace{333\ldots331}^{2021\text{ db}}}{\underbrace{333\ldots334}_{2021\text{ db}}} \qquad B = \frac{\overbrace{222\ldots221}^{2021\text{ db}}}{\underbrace{222\ldots223}_{2021\text{ db}}}$$ **7 pont**

Megoldás. Legyen $x = \overbrace{111\ldots111}^{2021\text{ db}}$. 1 pont

Ekkor

$$A = \frac{3x-2}{3x+1} \qquad \text{és} \qquad B = \frac{2x-1}{2x+1}.$$ 2 pont

$$B - A = \frac{2x-1}{2x+1} - \frac{3x-2}{3x+1} = \frac{(2x-1)(3x+1)-(3x-2)(2x+1)}{(2x+1)(3x+1)} =$$ 2 pont

$$= \frac{6x^2-x-1-(6x^2-x-2)}{(2x+1)(3x+1)} = \frac{1}{(2x+1)(3x+1)}.$$ 1 pont

Mivel $B - A > 0$, ezért a B szám nagyobb. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Ha a versenyző kipróbál néhány értéket és ez alapján állapítja meg, melyik a nagyobb, akkor legfeljebb 1 pontot kaphat.

4. Legyenek a, b, c valós számok! Igazoljuk, hogy az

$$x^2 + (a-b)x + (b-c) = 0$$
$$x^2 + (b-c)x + (c-a) = 0$$
$$x^2 + (c-a)x + (a-b) = 0$$

másodfokú egyenletek közül legalább az egyiknek van valós gyöke! **7 pont**

Megoldás. Legyen a három egyenlet diszkriminánsa rendre D_1, D_2, D_3. Ekkor

$$D_1 = (a-b)^2 - 4(b-c),$$
$$D_2 = (b-c)^2 - 4(c-a),$$
$$D_3 = (c-a)^2 - 4(a-b).$$ 2 pont

A három egyenlőség megfelelő oldalait összeadva:

$$D_1 + D_2 + D_3 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 - 4(b-c) - 4(c-a) - 4(a-b) =$$
$$= (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2.$$ 2 pont

Mivel három négyzetszám összege nem lehet negatív, 1 pont

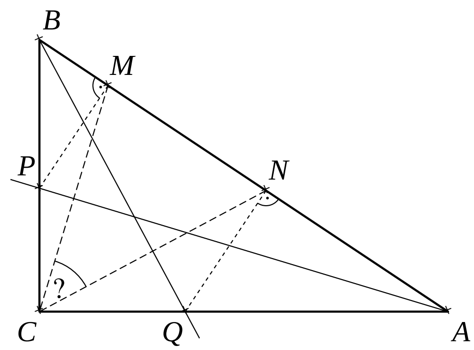
ezért D_1, D_2, D_3 közül legalább az egyik nemnegatív, és ez azt jelenti, hogy az ahhoz tartozó másodfokú egyenletnek van valós megoldása. Ezzel az állítást igazoltuk. 2 pont

Összesen: **7 pont**

5. A C-nél derékszögű ABC háromszög $CAB\sphericalangle$ és $ABC\sphericalangle$ belső szögfelezői a BC, illetve a CA oldalakat rendre a P és a Q pontokban metszik. M és N pontok pedig a P-ből és a Q-ból az AB átmérőre állított merőlegesek talppontjai.

Mekkora $MCN\sphericalangle$ pontos értéke? **7 pont**

Megoldás. Rajzoljunk ábrát, és használjuk a jelöléseit. A szokásos módon legyen az A-nál lévő $CAB\sphericalangle = \alpha$, és a B-nél lévő $ABC\sphericalangle = \beta = 90^\circ - \alpha$.



1 pont

Mivel AP és BQ szögfelező, ezért $CAP\sphericalangle = PAM\sphericalangle$, továbbá $AMP\sphericalangle = PCA\sphericalangle = 90^\circ$, emiatt az APC háromszög egybevágó APM háromszöggel, hiszen megfelelő szögeik egyenlőek, és a legnagyobb szögükkel szemközti oldaluk közös. Teljesen ugyanígy adódik, hogy $BCQ\triangle \cong BNQ\triangle$. 2 pont

A fenti egybevágóságok miatt $PM = PC$, illetve $QC = QN$, azaz $PCM\triangle$ és $QNC\triangle$ egyenlő szárú. 1 pont

Szögszámolással adódik a megfelelő háromszögekben, hogy $QAN\sphericalangle = \alpha$ és $QNA\sphericalangle = 90^\circ$ miatt $NQA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, innen $CQN\sphericalangle = 90^\circ + \alpha$, és innen az egyenlő szárú CQN háromszögben $NCQ\sphericalangle = QNC\sphericalangle = \dfrac{90^\circ - \alpha}{2} = \dfrac{\beta}{2}$.

Hasonlóan, $MBP\sphericalangle = \beta$ és $PMB\sphericalangle = 90^\circ$ miatt $BPM\sphericalangle = 90^\circ - \beta$, innen $MPC\sphericalangle = 90^\circ + \beta$, és innen az egyenlő szárú CMP háromszögben $CMP\sphericalangle = PCM\sphericalangle = \dfrac{90^\circ - \beta}{2} = \dfrac{\alpha}{2}$. 2 pont

Innen adódik, hogy $MCN\sphericalangle = 90^\circ - (PCM\sphericalangle + NCQ\sphericalangle)$, és így $MCN\sphericalangle = 90^\circ - \dfrac{\alpha + \beta}{2} = 45^\circ$. 1 pont

Összesen: **7 pont**