Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen H azon r $(0 < r < 1)$ racionális számok halmaza, amelyek végtelen periodikus tizedes tört alakja $0{,}abcabcabc\ldots = 0{,}\dot{a}b\dot{c}$, ahol a, b, c, nem feltétlenül különböző számjegyek. Felírva H elemeinek redukált tört alakját, hányféle számlálót kapunk? **10 pont**

Megoldás. $x = \overline{0{,}\dot{a}b\dot{c}} \Rightarrow 1000x = \overline{abc{,}\dot{a}b\dot{c}} \Rightarrow 999x = \overline{abc} \Rightarrow x = \dfrac{\overline{abc}}{999} = \dfrac{\overline{abc}}{3^3 \cdot 37}$.

Ha $3 \nmid \overline{abc}$ és $37 \nmid \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc}$ a redukált tört számlálója.

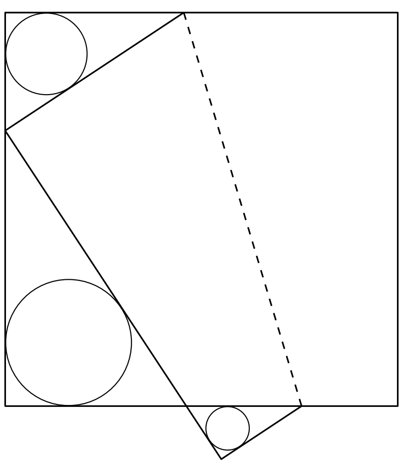
1-től 999-ig 333 db 3-mal osztható, 27 db 37-tel osztható, 9 db $3 \cdot 37$-tel osztható szám van. A logikai szita formulát használva: $999 - (333 + 27) + 9 = 648$ db ilyen számláló van.

Ha x egyszerűsíthető, de a redukált tört számlálója nem osztható sem 3-mal sem 37-tel, akkor a számláló az előbbi 648-féle szám egyike.

Ha a redukált tört számlálója osztható 3-mal, akkor $81 \mid \overline{abc}$. Ekkor 12 db újabb lehetőség adódik.

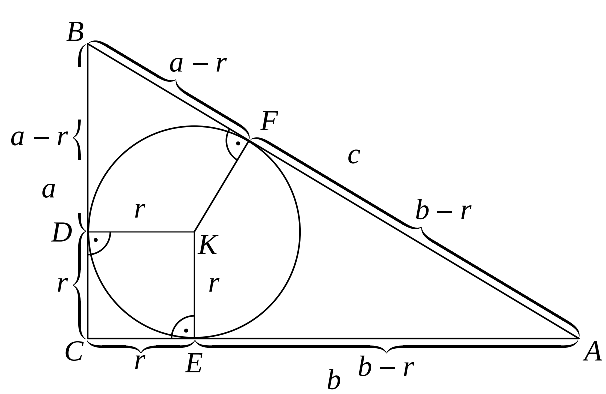
A redukált tört számlálója nem lehet osztható 37-tel, mivel 37^2 négyjegyű szám. Tehát összesen $648 + 12 = 660$-féle lehet a redukált tört számlálója.

Összesen: **10 pont**

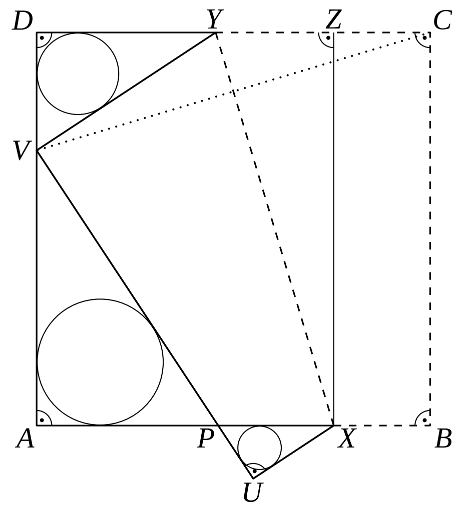
2. 

Egy négyzet alakú papírlapot úgy hajtunk meg, hogy a hajtásvonal a négyzet két szemköztes oldalát metssze, de ne menjen át a négyzet csúcsain. Ezután a keletkező háromszögekbe az alábbi ábra szerint egy-egy kört írunk. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott három kör egyikének sugara megegyezik a másik két kör sugarának összegével! **10 pont**

Megoldás. Először fejezzük ki a derékszögű háromszög beírt körének sugarát az oldalak segítségével.



Jelöljük az ábra szerint az ABC derékszögű háromszög oldalait a, b, c-vel, k beírt körének középpontját K-val, sugarát r-rel, a BC, CA és AB oldalakkal alkotott érintési pontjait rendre D, E, F-fel. Ekkor mivel az érintési pontba húzott sugár merőleges az érintőre, ezért a $KDCE$ négyszög négyzet és $CD = CE$. Másrészt a külső pontból a körhöz húzott érintőszakaszok egyenlősége miatt $AE = AF = a - r$ és $BD = BF = b - r$. Így az átfogóra felírható $c = a - r + b - r$ alapján $2r = a + b - c$. 3 pont



Ezután térjünk át a feladat állításának igazolására. Jelöljük a négyzet csúcsait A, B, C, D-vel, a törésvonal két végpontját X, Y-nal ($X \in AB$, $Y \in CD$), a B és C csúcsok XY egyenesre vonatkozó tükörképét rendre U, V-vel, az AB és UV szakaszok metszéspontját P-vel.

Legyen a VYD, PVA és XPU derékszögű háromszögek beírt körének átmérője és sugara rendre d_1, d_2, d_3, illetve r_1, r_2, r_3. Ekkor a korábbi összefüggés alapján:

$$d_1 = YD + DV - VY$$

$$d_2 = VA + AP - PV$$

$$d_3 = PU + UX - XP$$

1 pont

Bevezetve az $AB = a$ jelölést, a $VY = CY$ és $UX = BX$ egyenlőségek figyelembevételével:

$$d_1 + d_3 - d_2 = (a - CY) + DV - CY + PU + BX - XP - (a - DV) - (a - BX - XP) + (a - PU) =$$
$$= 2(DV + BX - CY)$$

3 pont

Legyen az X pont CD oldalra való merőleges vetülete Z. A C és V pontok egymás tükörképei az XY egyenesre vonatkozóan, így $CV \perp XY$. Másrészt $CD \perp XZ$ alapján $VCD\sphericalangle = YXZ\sphericalangle$ (merőleges szárú hegyesszögek). 2 pont

$CD = XZ = a$ figyelembevételével $CDV\triangle \cong XZY\triangle$, és emiatt:

$$DV = ZY = CY - CZ = CY - BX.$$

Ezt felhasználva $d_1 + d_3 - d_2 = 0$, amiből a 2-vel való leosztás és rendezés után az $r_2 = r_1 + r_3$ egyenlőség adódik. 1 pont

Ezzel az állítást beláttuk.

Összesen: **10 pont**

3. A 900 számnak legfeljebb hány osztója választható ki úgy, hogy egyik se ossza egyik másikat se? **10 pont**

Megoldás. A 900 prímtényezős felbontása $900 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$, négyzetgyöke a $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$. Jegyezzük fel, hogy előbbi azt jelenti, hogy a 900-nak 27 osztója van. 1 pont

Vegyük észre, hogy ha kiválasztjuk a 30-at, melynek 3 prímosztója van, és hozzávesszük a 900 összes többi olyan osztóját, melynek szintén 3 prímosztója van (multiplicitással számolva), azaz a $2^2 \cdot 3 = 12$-t, a $2^2 \cdot 5 = 20$-at, a $2 \cdot 3^2 = 18$-at, a $2 \cdot 5^2 = 50$-et, a $3^2 \cdot 5 = 45$-öt és a $3 \cdot 5^2 = 75$-öt, akkor ez összesen 7 szám, és egyik sem osztja semely másikat sem, hiszen bármelyik két különbözőhöz van egy olyan prím, amelyik az egyikben, és egy olyan prím, amelyik a másikban szerepel nagyobb kitevővel. 2 pont

Most bebizonyítjuk, hogy ennél többet nem lehet kiválasztani. Tekintsük ugyanis a következő osztóláncokat:

$$1 \mid 3 \mid 9 \mid 45 \mid 225;$$

$$2 \mid 6 \mid 18 \mid 90 \mid 450;$$

$$4 \mid 12 \mid 36 \mid 180 \mid 900;$$

$$5 \mid 25 \mid 75;$$

$$10 \mid 50 \mid 150;$$

$$20 \mid 100 \mid 300;$$

$$15 \mid 30 \mid 60.$$

Ezek valóban a 900 mind a 27 osztóját felsorolják. (Amit egyébként könnyű egy $3 \times 3 \times 3$ kockában vizualizálni, melynek bal alsó csúcsában áll az 1, a jobb felsőben maga a 900, felfelé lépve minden felett a 2-szerese, jobbra lépve mindennek a 3-szorosa, hátrafelé lépve pedig mindennek az 5-szöröse áll – ebből az ábrából egyébként a megnevezett láncokat sem nehéz megtalálni.) 4 pont

Világos, hogy minden láncból legfeljebb egy számot választhatunk ki, hiszen egy lánc két száma között van oszthatósági reláció. Tehát 7-nél több szám nem választható ki a kívánt módon. 2 pont

Így a válasz 7. 1 pont

Összesen: **10 pont**