Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2022/2023-as tanév

Kezdők I–II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Három különböző számjegyből elkészítjük a lehető legnagyobb és a legkisebb háromjegyű számot, majd azokat összeadjuk. Eredményül 1453-at kapunk. Melyek voltak a számjegyek? **6 pont**

1. megoldás. 3 végű két egyjegyű szám összege, amelyek egyike sem 0 így lehet:

$1+2$, $9+4$, $8+5$, $6+7$. 2 pont

Mivel a három számjegy különböző, ezért a két összeadandó között nem lehet 1 a különbség, mert akkor a középső számjegyet nem tudjuk a feltételeknek megfelelően választani. 1 pont

Ha az egyik szám alakja 9_4, a másik pedig 4_9, akkor a középső számjegy a 7. 1 pont

Ha az egyik szám alakja 8_5, a másik pedig 5_8, akkor is a középső számjegy a 7. 1 pont

Tehát a keresett számjegyek: 4, 7, 9 vagy 5, 7, 8. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. megoldás. Legyen a három számjegy $0 < a < b < c$. Akkor a két szám $100a + 10b + c$, illetve $100c + 10b + a$. 2 pont

Ezek összege $101(a + c) + 20b = 1453$. 1 pont

b lehetséges értékei 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, vagyis $20b$ lehet 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160. Eszerint $101(a + c)$ lehetséges értékei 1413, 1393, 1373, 1353, 1333, 1313, 1293. 1 pont

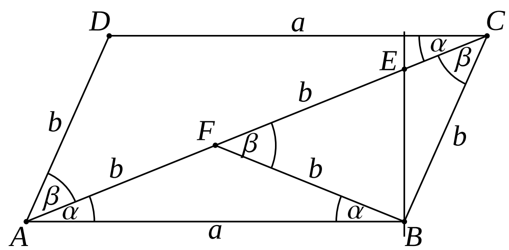
Ezek közül csak az 1313 osztható 101-gyel, ezért $20b = 140$, $b = 7$, illetve $a + b = 13$, ahonnan a és c lehet 4 és 9, illetve 5 és 8. 1 pont

Tehát a keresett számjegyek: 4, 7, 9 vagy 5, 7, 8. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Az $ABCD$ paralelogramma B csúcsából az AB oldalra állított merőleges az AC átlót egy E belső pontban metszi. Milyen arányban osztja az AC átló a BAD szöget, ha $AE = 2BC$? **6 pont**

Megoldás. Készítsünk ábrát! Jelöljük a paralelogramma AB oldalát a-val, BC oldalát b-vel. A BAC szög legyen α, a CAD szög pedig β.



A BCA szög és a CAD szög váltószögek, azaz BCA szög is β nagyságú. 1 pont

$AE = 2BC = 2b$. Legyen az AE szakasz felezőpontja F. Ekkor $AF = FE = b$.

Az ABE derékszögű háromszögben F az átfogó felezőpontja. Mivel F a háromszög köré írt körének középpontja, ezért $FB = b$ is teljesül. 1 pont

Az FBC háromszög egyenlő szárú, mert $FB = BC = b$, így a BFC szög is β nagyságú. 1 pont

Az AFB háromszög egyenlő szárú, mert $AF = FB = b$, így az FBA szög is α nagyságú. 1 pont

A BFC szög AFB háromszög F-nél lévő külső szöge, nagysága a vele nem szomszédos két belső szög összegével egyenlő, azaz 2α. 1 pont

Összegezve a fentieket: $BFC\sphericalangle = \beta = 2\alpha$, azaz az AC átló két olyan szögre osztja a BAD szöget, amelyek aránya 1 : 2. 1 pont

Összesen: **6 pont**

3. Melyik az a legnagyobb n egész szám, amelyre $n^2 + 2022$ osztható $(n+10)$-zel? **6 pont**

Megoldás. Tudjuk, hogy $n^2 - 100 = (n-10)(n+10)$. 1 pont

Ebből következik, hogy $n+10 \mid n^2 - 100$. 1 pont

Ha $n+10 \mid n^2 + 2022$ is teljesül, akkor $n+10 \mid (n^2+2022) - (n^2-100) = 2122$. 2 pont

Tehát $n+10 \leq 2022$, és $n \leq 2112$. 1 pont

Az $n = 2112$-t behelyettesítve, az oszthatóság valóban fennáll. 1 pont

Összesen: **6 pont**

4. Egy 3×3-as táblázat mindegyik mezőjébe 0-t, 1-et vagy 2-t írunk, majd összeadjuk az egy-egy sorban, illetve egy-egy oszlopban szereplő számokat. Lehetséges-e, hogy az így kapott hat szám mindegyike különböző? **6 pont**

Megoldás. Tegyük fel, hogy a kapott összegek lehetnek különbözők.

A legkisebb összeg $0+0+0=0$, a legnagyobb $2+2+2=6$. Ez összesen hétféle lehetőség. 1 pont

Először megmutatjuk, hogy a legkisebb és a legnagyobb összeg nem szerepelhet egyszerre a táblázatban. Ha mindkettő szerepelne benne, akkor mindkettőnek sorösszegnek vagy mindkettőnek oszlopösszegnek kellene lennie, hiszen nem lehet közös mezőjük. Tegyük fel, hogy mindegyik sorösszeg. Ekkor ahhoz, hogy az oszlopok összegei mind különbözzenek, a harmadik sorba csupa különböző számot kell írnunk. Ekkor azonban ennek a sornak és az 1-est tartalmazó oszlopnak egyaránt 3 az összege. 2 pont

Ha a legnagyobb és legkisebb összeg nem szerepelhet együtt, akkor az 1, 2, 3, 4 és 5 összegek mindegyikének szerepelnie kell ahhoz, hogy minden sor-, illetve oszlopösszeg különböző legyen.

Ekkor a hat szám összege $0+1+2+3+4+5=15$ vagy $1+2+3+4+5+6=21$, azaz biztosan páratlan szám. 1 pont

A hat szám összege a táblázatban szereplő összes szám összegének kétszerese, mivel minden szám két összegben (egy sor- és egy oszlopösszegben) szerepel. Azaz a hat szám összegének párosnak kellene lennie. 1 pont

Ellentmondásra jutottunk, ezért nem lehet, hogy a hat szám mindegyike különböző. 1 pont

Összesen: **6 pont**