

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

1997/1998 10. évfolyam 1. kategória 1. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgálató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Mutassuk meg, hogy ha egy téglalap oldalainak hossza a és $a+1$, akkor a téglalap szögfelezői által határolt síkidom területe független az a értékétől.

2. feladat

Mely pozitív egész n számokra osztható $n^8 - n^2$ 504-gyel?

3. feladat

Egy derékszögű háromszög egyik befogója egységnyi. A másik befogóhoz és az átfogóhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra. Mekkora a háromszög oldalai?

4. feladat

Oldjuk meg az egész számok halmazán a

$$\frac{x-1}{x} + \frac{x+1}{y} = 1, \quad \frac{x+1}{x} - \frac{x-1}{y} = 1$$

egyenletrendszert.

5. feladat

Egy szabályos százszög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy -1-et írunk. Egy „lépésben” bármely három egymást követő csúcshoz írt szám előjelét az ellenkezőjére változtathatjuk. (Például az 1; 1; -1 hármast a -1; -1; 1 hármásra cserélhetjük.)

- Elérhető-e ilyen „lépésekkel” tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy a csúcsokhoz írt 100 szám összege 0 legyen?
- Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon?