Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2005–2006-os tanév

MATEMATIKA, III. kategória

Az első (iskolai) forduló feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Igaz-e, hogy a $7k + 3$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ számtani sorozatban végtelen sok palindrom szám van? (Azokat a számokat nevezzük palindrom számoknak, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában a jegyeket fordított sorrendben felírva ugyanahhoz a számhoz jutunk, pl. 12321.)

2. Adott legalább kettő, de véges sok $1/2^k$ alakú szám, amelyek összege legfeljebb 1 (és minden k pozitív egész). Lássuk be, hogy a számok két csoportba sorolhatók úgy, hogy mindkét csoportban a számok összege legfeljebb $1/2$.

3. A $[0, 1]$ intervallumot 999 piros ponttal 1000 egyenlő részre, 1110 kék ponttal pedig 1111 egyenlő részre osztjuk fel. Mennyi a legkisebb távolság egy piros és egy kék pont között, és ez hány pontpárnál fordul elő?

4. Egy tetraédernek legalább négy éle legfeljebb egységnyi hosszúságú. Mekkora lehet maximálisan a tetraéder térfogata?

5. Legyen AB az O középpontú k körnek egy olyan húrja, amely nem átmérő. Jelölje M az AB szakasz felezőpontját, R pedig az OM félegyenesnek a k-val vett metszéspontját. Vegyünk fel egy tetszőleges P belső pontot a rövidebbik AR íven. A PM félegyenes messe a kört a Q pontban, és legyen S az AB és QR húrok metszéspontja. Az RS és PM szakaszok közül melyik a hosszabbik?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.