Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2005–2006-os tanév

MATEMATIKA, III. kategória

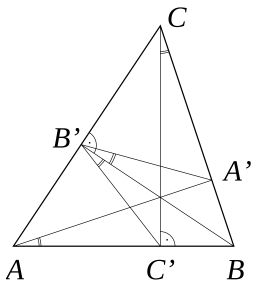
A döntő feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

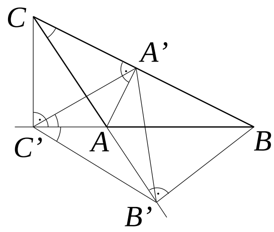
1. Egy tetszőleges, nem derékszögű háromszög esetén rajzoljuk meg a talpponti háromszöget, majd ennek a talpponti háromszögét stb. (a talpponti háromszög csúcsai a három magasságvonalnak a hozzájuk tartozó oldalegyenessel való metszéspontjai). Hány olyan, páronként nem hasonló háromszög létezik, amelynek a szögei fokokban mérve egész számok, és az eljárás során előbb-utóbb az eredetihez hasonló háromszöghöz jutunk?

2. Az r és s pozitív egészekről tudjuk, hogy bármely k pozitív egészre ks-nek legalább annyi osztója van, mint kr-nek. Lássuk be, hogy r osztója s-nek.

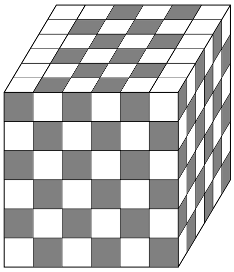
3. Egy kocka élhossza n egység. A felületét alkotó $6n^2$ darab egységnégyzet közül maximálisan hányat lehet kijelölni úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös oldala?



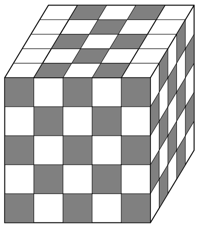
1. ábra



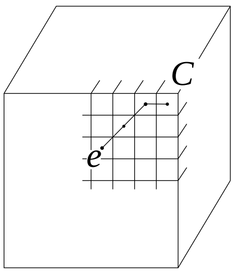
2. ábra



3a ábra

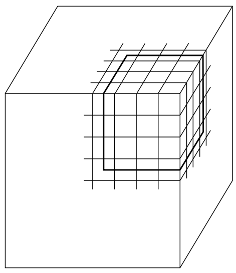


3b ábra



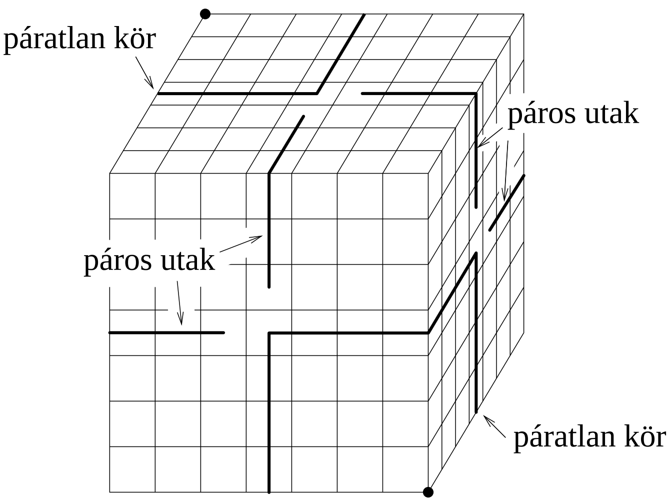
e és C távolsága 3

4. ábra



A C csúcstól 3 távolságra levő négyzetek 21 hosszúságú köre

5. ábra



6. ábra

Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2005–2006-os tanév

MATEMATIKA, III. kategória

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

A döntő feladatainak megoldásai

1. feladat.

Egy tetszőleges, nem derékszögű háromszög esetén rajzoljuk meg a talpponti háromszöget, majd ennek a talpponti háromszögét stb. (a talpponti háromszög csúcsai a három magasságvonalnak a hozzájuk tartozó oldalegyenessel való metszéspontjai). Hány olyan, páronként nem hasonló háromszög létezik, amelynek a szögei fokokban mérve egész számok, és az eljárás során előbb-utóbb az eredetihez hasonló háromszöghöz jutunk?

Megoldás: A szokásos módon jelölje a háromszög csűcsait A, B, C, a megfelelő szögeket α, β, γ, a talpponti háromszög megfelelő csúcsait pedig A', B', C'.

Legyen először az ABC háromszög hegyesszögű (1. ábra, az ábrákat lásd külön lapon). Ekkor $CB'C'B$ húrnégyszög, hiszen $CB'B\sphericalangle = CC'B\sphericalangle = 90°$. Ezért $BB'C'\sphericalangle = BCC'\sphericalangle = 90° - \beta$. Ugyanígy kapjuk, hogy $BB'A'\sphericalangle = 90° - \beta$. Ebből következik, hogy a talpponti háromszög B'-nél levő szöge $\beta' = 180° - 2\beta$. Hasonlóan adódik, hogy a talpponti háromszög másik két szöge $\alpha' = 180° - 2\alpha$, $\gamma' = 180° - 2\gamma$.

Vegyük most azt az esetet, amikor az ABC háromszögben A-nál tompaszög van (2. ábra). Az előzőhöz hasonló módon a $CC'B'B$ húrnégyszögből most azt kapjuk, hogy $BC'B'\sphericalangle = BCB'\sphericalangle = \gamma$, a $CC'AA'$ húrnégyszögből pedig azt, hogy $A'C'A\sphericalangle = A'CA\sphericalangle = \gamma$. Innen $\gamma' = 2\gamma$, és hasonlóan $\beta' = 2\beta$. Ebből következik, hogy $\alpha' = 180° - (\beta' + \gamma') = 2\alpha - 180°$.

Jelölje az eredeti háromszöget H_0, a talpponti háromszögét H_1, és általában H_i talpponti háromszögét H_{i+1}. Ha H_i szögei α_i, β_i, γ_i, akkor az előzőek szerint H_{i+1} szögei vagy $180° - 2\alpha_i$, $180° - 2\beta_i$, $180° - 2\gamma_i$, vagy pedig $2\alpha_i - 180°$, $2\beta_i$, $2\gamma_i$. Ha H_0 szögeinek fokokban vett mérőszámai egészek, akkor H_1 szögeinek mérőszámai a fentiek alapján párosak, H_2 szögeinek mérőszámai pedig 4-gyel oszthatók. Így az eredetihez hasonló háromszöget csak akkor nyerhetünk, ha H_0 szögeinek a mérőszámai is oszthatók 4-gyel. (Ebben az esetben az rögtön látszik, hogy az eljárás során sohasem jutunk derékszögű háromszöghöz, tehát minden H_i létezik.)

Megmutatjuk, hogy ez a feltétel nemcsak szükséges, hanem elégséges is ahhoz, hogy legyen olyan $n > 0$, amelyre H_n hasonló H_0-hoz. Ehhez azt fogjuk belátni, hogy ha a K és L nem hasonló háromszögek szögeinek mérőszáma 4-gyel osztható, akkor a talpponti háromszögeik sem lehetnek hasonlók, vagyis

$$K' \sim L' \iff K \sim L. \tag{1}$$

Ebből a kívánt $H_0 \sim H_n$ hasonlóság valóban következik: a $H_0, H_1, H_2, \ldots$ végtelen sok háromszög között lesz két hasonló, hiszen a szögekre csak véges sok lehetőség áll fenn, tehát valamely $i < j$-re $H_i \sim H_j$, és ekkor (1) alapján $H_0 \sim H_{j-i}$.

(1) igazolásához tegyük fel, hogy a K' és L' talpponti háromszögek szögei megegyeznek. Ha K és L mindketten hegyesszögűek, vagy mindketten tompaszögűek, akkor a talpponti háromszögek szögeire kapott összefüggések alapján az eredeti háromszögek szögei is

meg kell hogy egyezzenek. Ha K hegyesszögű és L tompaszögű, és L egyik hegyesszöge δ, akkor a két talpponti háromszög egyik szögére $2\delta = 180° - 2\nu$, ahol ν a K háromszög valamelyik szöge. Innen $\delta + \nu = 90°$, ami lehetetlen, hiszen δ és ν mérőszáma is osztható 4-gyel, a 90 viszont nem.

A feladatban feltett kérdés megválaszolásához most már csak össze kell számolnunk, hány olyan (nem csak a tagok sorrendjében) különböző szöghármas létezik, amelyek mérőszámai 4-gyel oszthatók, és az összegük 180. Vagyis a $4x + 4y + 4z = 180$, azaz az $x + y + z = 45$ egyenlet (nem csak a tagok sorrendjében különböző) megoldásainak a számát keressük a pozitív egészek körében. Ha a számegyenesen a 0-tól felmérjük az x-et, utána az y-t, majd a z-t, akkor tulajdonképpen az $1, 2, \dots, 44$ pontok közül kell kettőt kiválasztanunk, amit $\binom{44}{2}$-féleképpen tehetünk meg. Ekkor azonban x, y és z sorrendjét is figyelembe vettük. Ha x, y és z páronként különbözők, akkor ezeknek 6-féle sorrendje van, ha közülük pontosan kettő azonos, amely közös érték lehet $1, 2, \dots, 14, 16, \dots, 22$, akkor 3-féle a sorrend, és van még az $x = y = z = 15$ eset. Így a keresett megoldásszám $22 + \dfrac{\binom{44}{2} - 21 \cdot 3 - 1}{6} = 169$.

Az összeszámolást úgy is elvégezhetjük, hogy az $x+y+z = 45$ egyenlet $1 \le x \le y \le z$ feltételeknek eleget tevő megoldásait keressük. Tetszőleges $1 \le x \le 15$-höz a megfelelő y, $z = 45 - x - y$ értékeket az $x \le y \le 45 - x - y$ összefüggésből nyerjük, azaz $x \le y \le (45 - x)/2$. A megfelelő y-ok száma így $x = 2k + 1$-re $(45 - x)/2 - (x - 1) = 22 - 3k$, és $x = 2t$-re $(44 - x)/2 - (x - 1) = 22 - 3t + 1$. Ezeket $0 \le k \le 7$-re, illetve $1 \le t \le 7$-re összegezve ugyanúgy 169 adódik.

2. feladat.

Az r és s pozitív egészekről tudjuk, hogy bármely k pozitív egészre ks-nek legalább annyi osztója van, mint kr-nek. Lássuk be, hogy r osztója s-nek.

Megoldás: A szokásos módon $b \mid c$-vel jelöljük, hogy b osztója c-nek, és $d(b)$-vel a b pozitív osztóinak a számát. Ismeretes, hogy ha b törzstényezős felbontása $b = q_1^{\delta_1} \dots q_t^{\delta_t}$, ahol $q_1, \dots, q_t$ különböző prímek, $\delta_1, \dots, \delta_t$ nemnegatív egészek, akkor $d(b) = (\delta_1 + 1) \dots (\delta_t + 1)$.

Tegyük fel indirekt, hogy r nem osztója s-nek. Ekkor van olyan p_1 prímszám, hogy az r a p_1-nek magasabb hatványával osztható, mint az s.

Írjuk fel r és s törzstényezős felbontását (azonos prímekkel, esetleges 0 kitevőket is megengedve):

$$r = p_1^{\alpha_1} \dots p_j^{\alpha_j}, \quad s = p_1^{\beta_1} \dots p_j^{\beta_j}, \quad \alpha_i, \beta_i \ge 0,\ i = 1, \dots, j,\ \alpha_1 > \beta_1.$$

Legyen $k = (p_2 \dots p_j)^m$ (illetve $k = 1$, ha $j = 1$). Ekkor

$$\frac{d(ks)}{d(kr)} = \frac{\beta_1 + 1}{\alpha_1 + 1} \cdot \frac{m + \beta_2 + 1}{m + \alpha_2 + 1} \cdot \dots \cdot \frac{m + \beta_j + 1}{m + \alpha_j + 1}.$$

Itt a jobb oldali első tört 1-nél kisebb, a többi tört pedig $m \to \infty$ esetén 1-hez tart. Ezért elég nagy m-re a jobb oldal 1-nél kisebb lesz. Ez viszont ellentmond annak, hogy a bal oldal a feltétel szerint bármely k-ra legalább 1.

3. feladat.

Egy kocka élhossza n egység. A felületét alkotó $6n^2$ darab egységnégyzet közül maximálisan hányat lehet kijelölni úgy, hogy semelyik kettőnek ne legyen közös oldala?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy a keresett maximum $3n^2-2n$, ha n páros, és $3n^2-2n+1$, ha n páratlan.

I. Először azt igazoljuk, hogy ennyi egységnégyzet (a továbbiakban röviden: négyzet) kijelölhető. Tekintsük a kockát egy vízszintes síkon állónak. Ekkor a négy oldallap alkotta „palást” $n \times 4n$ négyzete közül a sakktáblaszabály szerint kijelölhetjük minden másodikat, ez tehát $2n^2$ darab négyzet. Ezután az alap- és fedőlapon két-két alkalmas párhuzamos szélső sort elhagyva a megfelelő oldallapokhoz illeszkedve folytatható a sakktáblás kiválasztás, és így páros n esetén $2n(n-2)/2 = n^2-2n$, páratlan n esetén pedig $2\lceil n(n-2)/2\rceil = 2(n^2-2n+1)/2 = n^2-2n+1$ további négyzet kijelölhető (lásd a 3a és 3b ábrát).

II. Most belátjuk, hogy ennél több négyzet nem adható meg. Legyen először n páros, $n=2k$.

Nevezzük körnek különböző négyzetek olyan $e_1, \ldots, e_r$ sorozatát, ahol minden $1 \le i \le r-1$-re e_i-nek és e_{i+1}-nek van közös oldala, továbbá e_r-nek és e_1-nek is van közös oldala. (Ha a négyzetek helyett azok középpontjait vesszük, és az oldalszomszédos négyzetek középpontjait éllel összekötjük, akkor így egy G gráfot kapunk, és a négyzetekből álló körök a G gráf köreinek felelnek meg. A feladat feltétele pedig azt jelenti, hogy G szögpontjainak egy független részhalmazát kell kiválasztani.)

A kocka felületét alkotó négyzetek halmazát $4n$ darab páratlan hosszúságú kör diszjunkt egyesítésére fogjuk felbontani. Egy $r=2h+1$ hosszúságú körből nyilván legfeljebb $h=(r/2)-(1/2)$ darab megfelelő négyzet választható ki, tehát $4n$ darab páratlan hosszúságú kör esetén legfeljebb $M=(R/2)-(4n/2)$ négyzet vehető, ahol R a körök összhossza, vagyis $6n^2$. Ebből tehát a kívánt $M=3n^2-2n$ felső becslés adódik.

A $4n$ darab páratlan kört a következőképpen képezzük. Nevezzük egy e négyzet és egy C kockacsúcs távolságának azt a minimális v számot, ahányszor mindig oldal- vagy csúcs-szomszédos négyzetre lépve e-ből egy, a C-t tartalmazó négyzetbe juthatunk. A C-t tartalmazó 3 négyzetnek tehát a C-től való távolsága 0, az ezekkel közös oldallal vagy csúccsal rendelkező 9 újabb négyzetnek a C-től való távolsága 1 stb. (lásd a 4. ábrát).

Vegyük most minden kockacsúcs körül az attól $0, 1, \ldots, (n/2)-1$ távolságra levő négyzetek halmazát, így $8 \times (n/2) = 4n$ páratlan hosszúságú kört kapunk, amelyek diszjunkt egyesítése éppen az összes négyzet (a j távolságra levő négyzetek $6j+3$ hosszúságú kört alkotnak, lásd az 5. ábrát).

Ha $n=2k+1$, akkor ugyanígy vesszük a kockacsúcsok körül az azoktól $0, 1, \ldots, k-1$ távolságra levő négyzetek alkotta $8k$ darab páratlan hosszúságú kört, valamint két átellenes kockacsúcs körül még az azoktól k távolságra levő négyzetek alkotta két páratlan kört is. Ekkor még kimarad 6 darab páros hosszúságú „út”, amelyek mindegyike két szomszédos kockalap középvonalának „majdnem a feléből” áll össze (lásd a 6. ábrát). Ez azt jelenti, hogy összesen $8k+2$ páratlan körünk van, tehát a kiválasztható négyzetek száma legfeljebb $6n^2/2-(8k+2)/2 = 3n^2-2n+1$, amint állítottuk.