

**Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2006-2007. tanévi első fordulójának feladatai
matematikából, a II. kategória számára**

1. Melyek azok a pozitív egészek, amelyeknek pontosan négy pozitív osztójuk van és ezek összege 84?

2. Az a valós paraméterrel adott az alábbi egyenlet, jelölje az egyenlet valós gyökeit x_1 és x_2 :

$$2x^2 - 3(a + 2)x + 9a + 1 = 0.$$

- (a) Határozzuk meg a értékét úgy, hogy az $x_1^2 + x_2^2$ kifejezés értéke minimális legyen.
- (b) Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan valós a érték, amely esetén x_1 és x_2 is egész szám.
- (c) Keressük meg az a paraméter olyan egész értékeit, melyek esetén az egyenletnek egyik gyöke egész.

3. Legyen n egynél nagyobb egész. Egy háromszög oldalainak mérőszámai:

$$a = 2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n, \quad b = 2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1}, \quad c = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{n-1}.$$

Mekkora a háromszög legnagyobb szögének tangense?

4. Egy táblára felírunk négy darab egymástól különböző pozitív egész számot. Először letörölünk kettőt, helyettük felírjuk a letörölt két szám mértani közepét. A táblán lévő három szám közül újra letörölünk kettőt, helyettük felírjuk a most letörölt két szám mértani közepét. Ezt követően a táblán levő két szám mértani közepe 2.

Mekkora lehetett az eredeti négy szám összege?

5. A hegyesszögű ABC háromszög AC oldalának mely P pontjára lesz a $PB^2 + PC^2$ összeg minimális?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.