OKÉV
Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

GIMNÁZIUM

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2006-2007. tanévi első fordulójának feladatmegoldásai matematikából, a II. kategória számára

1. Melyek azok a pozitív egészek, amelyeknek pontosan négy pozitív osztójuk van és ezek összege 84?

1. megoldás: Legyen n a keresett szám. A négy osztó között van az 1 és n, legyen a másik két osztó a és b, $1 < a < b$. Használjuk ki, hogy ezek egymás osztópárjai, azaz $ab = n$. 1 pont

Ekkor

$$1 + a + b + n = 1 + a + b + ab = (1 + a)(1 + b) = 84.$$

Ezek szerint a 84-et kell két egész szorzataként felírni. A szorzótényezőkről tudjuk, hogy $3 \leq 1 + a < 1 + b$. 3 pont

A lehetséges esetek: $84 = 3 \cdot 28 = 4 \cdot 21 = 6 \cdot 14 = 7 \cdot 12$. A négyféle szorzat esetén az $(a; b)$ párok és a hozzájuk tartozó $ab = n$ érték:

$$2 \cdot 27 = 54, \quad 3 \cdot 20 = 60, \quad 5 \cdot 13 = 65, \quad 6 \cdot 11 = 66.$$

Így megkaptuk n lehetséges értékeit, ezek közül csak az $n = 65$-nek van 4 osztója. Az 54, 60 és 66 számoknak négynél több osztója van, ezek nem felelnek meg. Az $n = 65$ valóban jó megoldás, 1+5+13+65=84. 3 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás: Felhasználjuk, hogy ha n prímtényezős felbontása $n = \prod {p_i}^{\alpha_i}$, akkor n osztóinak száma $\prod(\alpha_i + 1)$. Négy osztó ezek szerint akkor lehet, ha $n = p^3$, vagy $n = p_1 \cdot p_2$ alakú. 2 pont

Ha $n = p^3$, akkor a négy osztó 1, p, p^2 és p^3. Mivel $1 + p + p^2 + p^3 = 84$, ezért $p(1 + p + p^2) = 83$. Ezek szerint 83 összetett szám, ami nem igaz. Ez az eset nem ad megoldást. 1 pont

Ha $n = p_1 \cdot p_2$, akkor legyen $p_1 < p_2$. egy szám legkisebb prímosztója nem lehet nagyobb a szám négyzetgyökénél. Mivel $n < 84$, ezért $p_1 < \sqrt{84}$. Ezek szerint p_1 lehet 2, 3, 5, vagy 7. Ezeket ellenőrizve csak a $p_1 = 5$ esetén lesz p_2 prím:

$$1 + 2 + p_2 + 2p_2 = 84, \quad \Longrightarrow \quad p_2 = 27,$$

$$1 + 3 + p_2 + 3p_2 = 84, \quad \Longrightarrow \quad p_2 = 20,$$

$$1 + 5 + p_2 + 5p_2 = 84, \quad \Longrightarrow \quad p_2 = 13,$$

$$1 + 7 + p_2 + 7p_2 = 84, \quad \Longrightarrow \quad p_2 = 9,5.$$

Ezek szerint egyetlen megoldás lehetséges. Ellenőrizve, az $n = 5 \cdot 13 = 65$ valóban jó megoldás, 1+5+13+65=84. 4 pont

Összesen: 7 pont

Amennyiben megtalálja az $n = 65$ megoldást, de nem bizonyítja, hogy ez az egyetlen megoldás, akkor legfeljebb 3 pontot kaphat.

Mivel a 84 kis szám, a feladat megoldható szisztematikus próbálkozással, esetvizsgálattal is. Így is megkaphatja a 7 pontot, ha áttekinthető, helyes és hiánytalan az esetvizsgálat.

2. Az a valós paraméterrel adott az alábbi egyenlet, jelölje az egyenlet valós gyökeit x_1 és x_2:

$$2x^2 - 3(a+2)x + 9a + 1 = 0.$$

(a) Határozzuk meg a értékét úgy, hogy az ${x_1}^2 + {x_2}^2$ kifejezés értéke minimális legyen.

(b) Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan valós a érték, amely esetén x_1 és x_2 is egész szám.

(c) Keressük meg az a paraméter olyan egész értékeit, melyek esetén az egyenletnek egyik gyöke egész.

Megoldás: (a) Használjuk fel a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \left(\frac{3(a+2)}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{9a+1}{2} = \frac{9a^2+32}{4}.$$

Ez akkor lesz minimális, ha $a = 0$. 1 pont

Ekkor a másodfokú egyenletünk $2x^2 - 6x + 1 = 0$, ennek diszkriminánsa pozitív, két különböző valós gyök van, így az $a = 0$ valóban jó megoldás. 1 pont

(b) Tegyük fel, hogy valamely a értékre x_1 és x_2 is egész. Nézzük meg alaposabban a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket. Mivel a gyökök egészek, összegük és szorzatuk is egész lesz:

$$x_1 + x_2 = \frac{3a+6}{2}, \qquad x_1x_2 = \frac{9a+1}{2}.$$

Az összeg pontosan akkor egész, ha a számláló páros, azaz $3a$ páros, tehát a páros. A szorzat pontosan akkor egész, ha a számláló páros, azaz $9a$ páratlan, tehát a páratlan. Mivel a nem lehet egyszerre páros is és páratlan is, ezért nem lehet mindkét gyök egyszerre egész. 2 pont

(c) Legyen a egész és x_1 az egyenlet egész gyöke. Ekkor írjuk fel az eredeti egyenletünket, majd rendezzük át:

$$2x_1^2 - 3(a+2)x_1 + 9a + 1 = 0,$$

(1) $$3a(3 - x_1) = 2x_1(3 - x_1) - 1.$$

Az (1) egyenlet megmutatja, hogy x_1 nem lehet 3, hiszen akkor a bal oldal 0, a jobb oldal -1 lenne. Ezért oszthatunk $(3 - x_1)$-gyel:

$$3a = 2x_1 + \frac{1}{x_1 - 3}.$$

Mivel $3a$ és $2x_1$ is egészek, ezért $\frac{1}{x_1-3}$ is egész, tehát $(x_1 - 3)$ értéke 1, vagy -1. Ebből adódnak a megoldásaink: az a paraméter megfelelő értékei a 3 és az 1. Ha $a = 3$, az egész gyök az $x_1 = 4$. Ha $a = 1$, az egész gyök az $x_1 = 2$. 3 pont

Összesen: 7 pont

3. Legyen n egynél nagyobb egész. Egy háromszög oldalainak mérőszámai:

$$a = 2^{n+2} - 2^{n+1} + 2^n, \qquad b = 2^{n+1} - 2^n + 2^{n-1}, \qquad c = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{n-1}.$$

Mekkora a háromszög legnagyobb szögének tangense?

Megoldás: A feladatban szereplő háromszöghöz hasonlót kapunk, ha minden oldalának hosszát elosztjuk 2^n-nel. A megfelelő új oldalak betűjelét megtartva:

$$a = 2^2 - 2^1 + 1 = 3, \qquad b = 2^1 - 1 + 2^{-1} = \frac{3}{2}, \qquad c = 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2^{-1} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

1 pont

A háromszögben a legnagyobb szög a leghosszabb oldallal szemközt van, ez esetünkben az a oldal. 1 pont

Írjuk fel a koszinusztételt:

$$9 = \frac{9}{4} + \frac{18}{4} - 2\frac{9\sqrt{2}}{4}\cos\alpha.$$

Ebből

$$\cos\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

3 pont

Mivel α egy háromszög szöge, koszinusza pedig negatív, ezért a legnagyobb szög tompaszög. A $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ azonosságból adódóan az α tompaszög további szögfüggvényei: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{7}{8}}$, és ebből $\mathrm{tg}\alpha = -\sqrt{7}$. 2 pont

Összesen: 7 pont.

4. Egy táblára felírunk négy darab egymástól különböző pozitív egész számot. Először letörölünk kettőt, helyettük felírjuk a letörölt két szám mértani közepét. A táblán lévő három szám közül újra letörölünk kettőt, helyettük felírjuk a most letörölt két szám mértani közepét. Ezt követően a táblán levő két szám mértani közepe 2.

Mekkora lehetett az eredeti négy szám összege?

Megoldás: Legyen a négy szám a, b, c, d. Az első két letörölt szám legyen a és b. Ekkor a táblán van $\sqrt{ab}$, c és d. Most c és d közül valamelyiket biztos letöröljük, legyen ez c. Két lehetőség van: (1.) $\sqrt{ab}$ a másik letörölt, ekkor $\sqrt{c\sqrt{ab}}$ és d marad a táblán; (2.) d a másik letörölt, ekkor $\sqrt{ab}$ és $\sqrt{cd}$ marad a táblán. 2 pont

(1.) Ebben az esetben a táblán levő két szám mértani közepe: $\sqrt{d\sqrt{c\sqrt{ab}}} = 2$. Ismételt négyzetreemelések után $abc^2d^4 = 2^8$ adódik. Mivel a 2^8-nak a 2-n kívül nincs más prímosztója, ezért a számelmélet alaptétele miatt számaink felírhatóak a következő alakban $a = 2^x$, $b = 2^y$, $c = 2^z$ és $d = 2^v$, ahol x, y, z, v különböző nemnegatív egészek, melyekre

$$x + y + 2z + 4v = 8.$$

Ezen feltételek mellett v lehet 0, vagy 1. Ha $v = 0$, akkor a lehetséges esetek: $z = 1$, ekkor x és y valamilyen sorrendben 2 és 4, az eredeti négy szám összege: 4+16+2+1=23; $z = 2$, ekkor x és y valamilyen sorrendben 1 és 3, az eredeti négy szám összege: 2+8+4+1=15.

Ha $v = 1$, akkor a lehetséges esetek: $z = 0$, ekkor $x + y = 4$ ennek nincs olyan megoldása, melyben a változók 0-tól, 1-től és egymástól különbözőek lennének; $z = 1$, ekkor $x + y = 2$ és ennek sincs megfelelő megoldása. 3 pont

(2.) Ebben az esetben a táblán levő két szám mértani közepe:

$$\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}} = 2, \qquad \text{azaz} \qquad abcd = 2^4.$$

Az első eset mintájára dolgozhatunk, a következőt kapjuk: $x + y + z + v = 4$. Ennek nincs különböző nemnegatív egészekből álló megoldása. 2 pont

A táblán eredetileg szereplő négy szám összege tehát 23, vagy 15 lehetett.

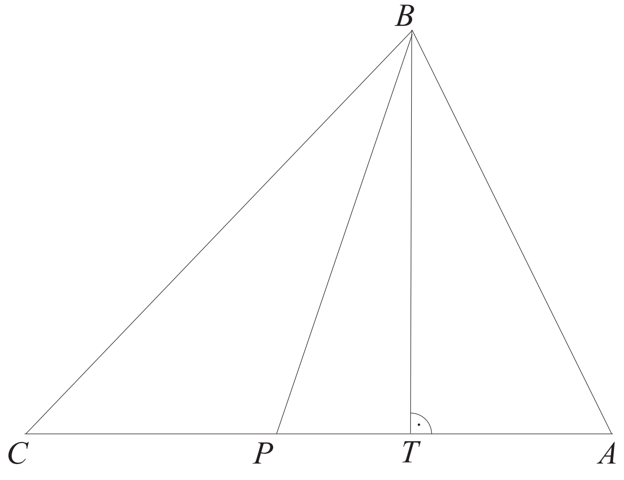
Összesen: 7 pont.

5. A hegyesszögű ABC háromszög AC oldalának mely P pontjára lesz a $PB^2 + PC^2$ összeg minimális?

Megoldás: Legyen a B csúcs AC-re eső merőleges vetülete T. Ekkor a Pitagorasz tételt alkalmazva

$$PB^2 + PC^2 = BT^2 + PT^2 + PC^2$$

. 3 pont



A jobb oldalon BT értéke állandó, ezért PT^2+PC^2 minimumát keressük. A PT^2+PC^2 minimuma ugyanakkor van, mint $\sqrt{\frac{PT^2+PC^2}{2}}$ minimuma. Alkalmazzuk a négyzetes és számtani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt{\frac{PT^2+PC^2}{2}} \geq \frac{PT+PC}{2}.$$

A jobb oldal akkor a legkisebb, ha P a CT szakaszon van, ekkor a jobb oldal állandó. A bal oldali kifejezés tehát akkor minimális, ha P rajta van CT-n és a négyzetes és számtani közép egyenlő, ekkor $PT = PC$. 4 pont

A $PB^2 + PC^2$ összeg akkor minimális, ha P a TC szakasz felezőpontja, azaz a BC szakasz felezőpontjának a AC-re eső merőleges vetülete.

Összesen: 7 pont.