Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2007-2008. tanévi második fordulójának feladatmegoldásai matematikából, a II. kategória számára

1. Tekintsük azokat a konvex négyszögeket, amelyek 100 darab egységnyi oldalú szabályos háromszögre darabolhatók. Mekkorák lehetnek a megfelelő négyszögek oldalai?

Megoldás: A szabályos háromszög minden szöge $60°$-os. Ha a darabolás után a négyszög valamely csúcsa k darab kis háromszögnek lesz csúcsa, akkor a négyszög ezen szöge $k \cdot 60°$. Mivel a négyszög konvex, k csak 1 vagy 2 lehet, azaz a négyszög minden szöge $60°$-os, vagy $120°$-os. A négyszög ezek alapján két féle lehet: (a) ha két szomszédos szöge $60°$-os, akkor szimmetrikus trapéz; (b) ha két szemközti szöge $60°$-os, akkor paralelogramma. 3 pont

(a) Legyen a szimmetrikus trapéz hosszabb alapjának hossza x, magassága pedig $y \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$, azaz a szárak hossza y, ahol a trapéz szögeinek ismeretében $y < x$. Ekkor a párhuzamos oldalak közül a rövidebb hossza $x - y$, a kis háromszögek száma

$$100 = 2 \cdot \frac{x + (x - y)}{2} \cdot y.$$

Átrendezve $2xy - y^2 = 100$, $2xy$ és 100 páros, ezért y^2 illetve y is páros. Legyen $y = 2z$, ekkor $4xz - 4z^2 = 100$, amiből $(x - z)z = 25$. Mivel z osztója 25-nek és $2z < x$, innen z csak 1 lehet. Tehát $z = 1$, a szimmetrikus trapéz szárainak hossza $y = 2z = 2$, a párhuzamos oldalak hossza $x = 26$ és $x - y = 24$. 3 pont

(b) A paralelogramma oldalainak hossza legyen u és v, legyen $u \leq v$. Ekkor $uv = 50$. Az 50 osztói 1, 2, 5, 10, 25 és 50. Ezek 3 párt alkotva adhatják a paralelogramma oldalait. A lehetséges $(u; v)$ megoldások: (1;50), (2;25), (5;10). 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy 30 fős osztályban a karácsonyi ajándékozásról sorshúzással döntenek. Minden diák nevét felírják egy papírra, majd a 30 papírdarabot egy sapkába teszik. Névsor szerinti sorrendben mindenki kihúz egy papírt a sapkából és a rajta szereplő embernek készít ajándékot. Elképzelhető, hogy valaki saját magát ajándékozza meg.

Az átadás úgy történik, hogy először jelentkeznek, akik magukat húzták, majd a többi diák közül a legfiatalabb diák átadja ajándékát az általa húzott embernek, és innentől aki éppen megkapja az ajándékát, az lesz a soron következő ajándékot átadó ember. Ha valahol elakad a sor, azaz olyan diák kapja az ajándékot, aki már a sajátját átadta, de még nem mindenki adta át illetve kapta meg az ajándékát, akkor ez utóbbiak közül a legfiatalabb újra kezdi.

Mennyi a valószínűsége, hogy egy osztályban hat egymást követő év karácsonyi ajándékozása során lesz legalább egy olyan év, amelyben senki nem húzza magát és a sor sem akad el? (Az osztály létszáma minden évben ugyanannyi.)

Megoldás: Számoljuk ki, egyetlen sorsolás esetén mekkora a valószínűsége, hogy nem akad el a sor. Először tekinsük az összes eset számát: az első diák 30-félét húzhat, a következő 29-félét, ..., az utolsó egyfélét. Összesen 30!-féle sorsolás lehet. 2 pont

Ha nem akad el a sor, akkor a diákok körbe állhatnak úgy, hogy mindenki a jobb oldali szomszédját ajándékozza meg. A lehetséges sorsolások száma ugyanannyi, ahányféleképpen körbe tudnak állni. A legfiatalabbtól jobbkézre indulva az első ember 29-féle lehet, a következő 28-féle, ... az utolsó -a legfiatalabb bal oldali szomszédja- 1-féle. Az esetek száma tehát 29!. A keresett valószínűség $\frac{29!}{30!} = \frac{1}{30}$. Ezek szerint egy sorsolás esetén $\frac{29}{30}$ a valószínűsége, hogy a sor elakad. 3 pont

Annak a valószínűsége, hogy a 6 év mindegyikében elakad a sor éppen $\left(\frac{29}{30}\right)^6$. A feladat ezen esemény komplementerének valószínűségét kérdezi: annak valószínűsége, hogy egy hat évfolyamos osztályban előfordul legalább egyszer a hat karácsony közül, hogy nem akad el a sor

$$1 - \left(\frac{29}{30}\right)^6 \approx 0,184. \qquad 2 \text{ pont}$$

Összesen: 7 pont

3. Melyek azok az x, y, z és w valós számok, amelyekre egyszerre teljesül:

$$x + y + z = \frac{3}{2}, \tag{1}$$

$$\sqrt{4x-1} + \sqrt{4y-1} + \sqrt{4z-1} \geq 2 + 3^{\sqrt{w-2}}. \tag{2}$$

Megoldás: Becsüljük (2) bal oldalát felülről a számtani és a négyzetes közepek közötti összefüggés felhasználásával, kihasználva (1)-et:

$$\sqrt{4x-1} + \sqrt{4y-1} + \sqrt{4z-1} \leq 3 \cdot \sqrt{\frac{(4x-1)+(4y-1)+(4z-1)}{3}} =$$

$$= 3 \cdot \sqrt{\frac{4(x+y+z)-3}{3}} = 3.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $4x-1 = 4y-1 = 4z-1$, ami (1) miatt csak $x = y = z = \frac{1}{2}$ esetén teljesül. 3 pont

Most vizsgáljuk (2) jobb oldalát. Mivel $\sqrt{w-2} \geq 0$, ezért $3^{\sqrt{w-2}} \geq 1$, azaz $2+3^{\sqrt{w-2}} \geq 3$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $w-2=0$, azaz $w=2$. 2 pont

Ezek alapján (2) pontosan akkor teljesül, amikor mindkét oldal értéke 3 és a változók értékei $x = y = z = \frac{1}{2}$ és $w = 2$. 2 pont

Összesen: 7 pont

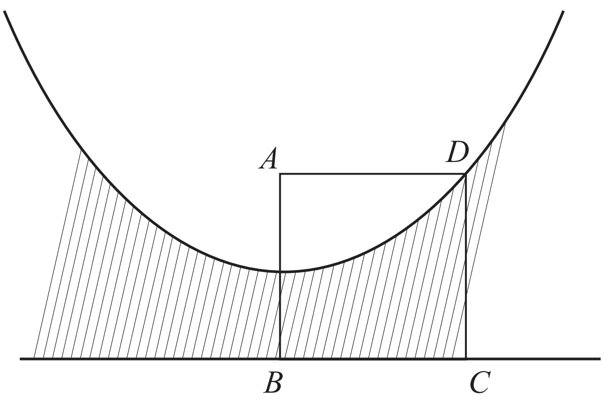
4. Adott egy egységnyi oldalú négyzet. Határozzuk meg a négyzet síkjában levő azon körök középpontjainak a halmazát (mértani helyét), amelyeknek a négyzet mind a négy oldalával két közös pontja van.

Megoldás: Legyenek a négyszög csúcsai A,B,C és D, a kör középpontja O, a kör sugara r. Legyen O távolsága az AB, BC, CD és DA oldalaktól rendre x, y, z és v. Annak feltétele, hogy a körnek az AB oldallal két közös pontja van:

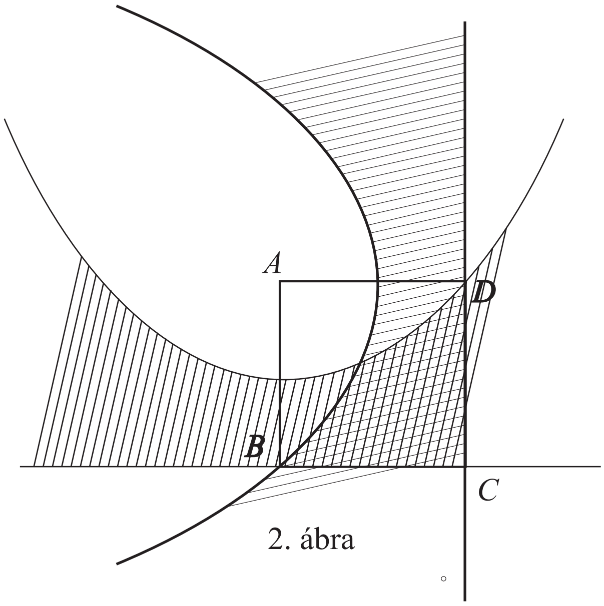
(i) $r > x$, azaz a kör metszi az AB egyenest és

(ii) $OA \geq r$ illetve $OB \geq r$, azaz a körnek és az AB egyenesnek a két metszéspontja az AB szakaszon vannak. Ugyanilyen feltételek érvényesek a többi oldalra is, azaz $r > y$, $r > z$, $r > v$ és $OC \geq r$, $OD \geq r$.

Az $OA \geq r$ és $r > y$ feltételek O-nak az A ponttól és a BC egyenestől való távolságáról szólnak; együtt azt jelentik, hogy O külső pontja annak a parabolának, melynek A a fókusza, BC egyenese a vezéregyenese. (1. ábra)



1. ábra

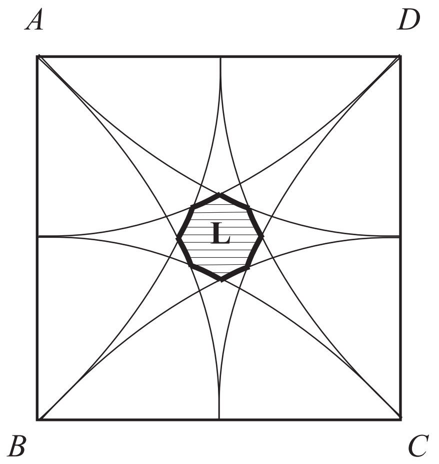


2. ábra

Az $OA \geq r$ és $r > z$ feltételek ugyanígy egy parabola külső pontjait adják, a fókusz A, a vezéregyenes CD. (2.ábra)

Amennyiben az előző gondolatmenetet alkalmazzuk a további három csúcs és megfelelő oldalpárok esetén, a parabolákon kívüli pontok a négyzet belsejében a 3. ábrán látható **L** alakzatot adják. Az alakzatot parabolaívek határolják, de a határvonal pontjai nem tartoznak hozzá **L**-hez. 4 pont

Az már kiderült, hogy csak **L** pontjai tartozhatnak a keresett mértani helyhez, most megmutatjuk, hogy **L** minden pontja megfelelő. Legyen O az **L** alakzat egy tetszőleges pontja. Tekintsük az OA, OB, OC és OD szakaszokat, legyen ezek hosszának minimuma a kör r' sugara, így a (ii) típusú feltételek teljesülnek. Az (i) típusú feltételek is teljesülnek, az általánosság rovása nélkül feltehető, hogy $x \geq y$, $x \geq z$, $x \geq v$ és O vetülete AB-n T. Ha $OA = r'$, akkor az OTA derékszögű -nem elfajuló- háromszögben $r' = OA > OT = x$. Ha $OB = r'$ ugyanígy érvelhetünk. Ha $OC = r'$ vagy $OD = r'$, akkor a paraboláink garantálják, hogy $r' > x$. 3 pont



3. ábra

Ezzel beláttuk, hogy a keresett mértani hely a parabolaívek által határolt **L** alakzat, a határvonal pontjai nem tartoznak hozzá **L**-hez.

Összesen: 7 pont