Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2007–2008-as tanév

MATEMATIKA, III. kategória

Az első (iskolai) forduló feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Az $ABCD$ síkbeli négyszög átlóinak (konkáv négyszög esetében az átlóegyeneseinek) metszéspontja M, az AMB, BMC, CMD és DMA háromszögek súlypontjai rendre a P, Q, R, S pontok, a BCD, ACD, ABD és ABC háromszögek súlypontjai pedig rendre az X, Y, Z, W pontok. Bizonyítsuk be, hogy az X, Y, Z, W pontok a $PQRS$ négyszög oldalegyenesein vannak.

2. Legyen f a pozitív valós számokon értelmezett valós értékű függvény, amelyre minden x, y esetén $f(xy) \leq xf(y)$. Igazoljuk, hogy minden x, y-ra $f(xy) = xf(y)$.

3. A térbeli A, B, C, D és E pontok közül semelyik négy sem esik egy síkba. Az A és B pontokat elválasztja a CDE sík (vagyis A és B a CDE sík különböző oldalára esik). Hasonlóan, B-t és C-t elválasztja az ADE sík, C-t és D-t elválasztja az ABE sík. Mutassuk meg, hogy ekkor D és E az ABC síknak ugyanarra az oldalára esik.

4. Van-e olyan, valós számokból álló, a $[0, 1]$ intervallumba eső A végtelen halmaz, amely nem tartalmaz háromtagú számtani sorozatot, de bármely két A-beli elem közé is esik A-beli elem?

5. Mely $n \geq 2007$ egészek rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal: bármely három különböző, n-nél nem nagyobb és az n-hez relatív prím pozitív egész összege is relatív prím n-hez?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.