Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2007–2008-as tanév

MATEMATIKA, III. kategória

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

Az első forduló feladatainak megoldásai

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket az ottani 5. pont utolsó mondatára, mely szerint minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 15 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül a versenybizottságnak**: OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 19. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy továbbra is érvényes a versenyszabályzatnak az Oktatási Minisztérium által történt szigorú módosítása, és így a Versenybizottság legfeljebb 30 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2007. november — A versenybizottság

1. feladat

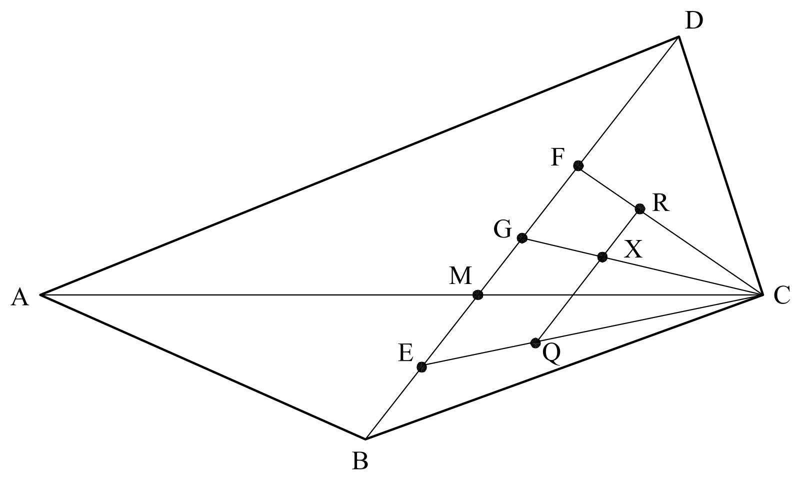
Az $ABCD$ síkbeli négyszög átlóinak (konkáv négyszög esetében az átlóegyeneseinek) metszéspontja M, az AMB, BMC, CMD és DMA háromszögek súlypontjai rendre a P, Q, R, S pontok, a BCD, ACD, ABD és ABC háromszögek súlypontjai pedig rendre az X, Y, Z, W pontok. Bizonyítsuk be, hogy az X, Y, Z, W pontok a $PQRS$ négyszög oldalegyenesein vannak.

Első megoldás: A megadott nagybetűs pontokba (egy adott kezdőpontból) mutató vektorokat jelöljük a megfelelő kisbetűvel, azaz pl. $\mathbf{a}$ az A-ba mutató vektor. Megmutatjuk, hogy X az RQ egyenesen fekszik (a többi ugyanígy igazolható). Ehhez azt kell belátni, hogy alkalmas λ számra $(*)$ $\mathbf{x} = \lambda\mathbf{r} + (1-\lambda)\mathbf{q}$. (1 pont)
A súlypont képlete miatt

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}; \quad \mathbf{r} = \frac{\mathbf{m}+\mathbf{c}+\mathbf{d}}{3}; \quad \mathbf{q} = \frac{\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{m}}{3}. \qquad \text{(3 pont)}$$

Ezt $(*)$-ba beírva, 3-mal szorozva és rendezve, a $(*)$-gal ekvivalens $\lambda\mathbf{b} + (1-\lambda)\mathbf{d} = \mathbf{m}$ egyenlőséghez jutunk. (2 pont)
Ez pedig valóban igaz, hiszen M a BD egyenesen fekszik. (1 pont)

Második megoldás: Megmutatjuk, hogy az X pont az RQ egyenesre illeszkedik (a többi ugyanígy igazolható). A BMC, MDC és DBC háromszögek mindegyikének a C csúccsal szemközti oldala a BD átlóegyenesen fekszik. E háromszögek súlypontjait C középpontú 2/3 arányú zsugorítással (középpontos hasonlósággal) kapjuk ezeknek a háromszögoldalaknak a felezőpontjaiból, E-ből, F-ből és G-ből. (4 pont)



Emiatt a Q, R és X pontok illeszkednek a BD egyenesnek a zsugorításnál keletkező képére, tehát kollineárisak. (3 pont)

2. feladat

Legyen f a pozitív valós számokon értelmezett valós értékű függvény, amelyre minden x, y esetén $f(xy) \leq xf(y)$. Igazoljuk, hogy minden x, y-ra $f(xy) = xf(y)$.

Megoldás: Elég az egyenlőséget az $y = 1$ speciális esetben belátni, azaz hogy minden x-re $f(x) = xf(1)$, ugyanis ekkor bármely y-ra $f(xy) = (xy)f(1)$ és $xf(y) = x(yf(1))$, azaz valóban $f(xy) = xf(y)$. (3 pont)

A feltétel szerint $f\left(\frac{1}{x} \cdot x\right) \leq \frac{1}{x} f(x)$. (2 pont)

Innen átrendezéssel $f(x) \geq xf(1)$. (1 pont)

Ezt az $f(x) \leq xf(1)$ feltétellel összevetve valóban a kívánt $f(x) = xf(1)$ adódik. (1 pont)

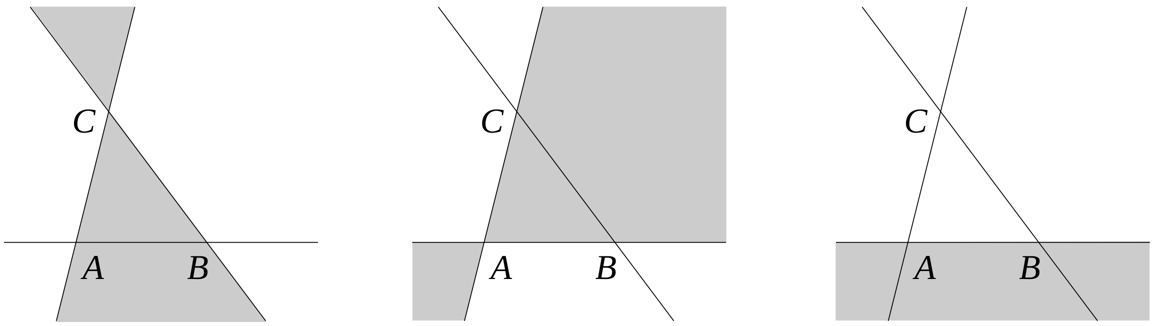
3. feladat

A térbeli A, B, C, D és E pontok közül semelyik négy sem esik egy síkba. Az A és B pontokat elválasztja a CDE sík (vagyis A és B a CDE sík különböző oldalára esik). Hasonlóan, B-t és C-t elválasztja az ADE sík, C-t és D-t elválasztja az ABE sík. Mutassuk meg, hogy ekkor D és E az ABC síknak ugyanarra az oldalára esik.

Első megoldás: Az $ABCD$ tetraéder lapsíkjai a teret tizenöt tartományra vágják fel. Ezek egyike maga a tetraéder. Négy további tartomány támaszkodik a tetraéder egy-egy lapjára, jelöljük ezek közül R_{ABC}-vel azt, amelyik az ABC lap mentén szomszédos a

tetraéderrel, R_{ABD}-vel az ABD lap mentén szomszédosat stb. További hat tartomány a tetraéder egy-egy éle mentén szomszédos vele, az AB él mentén csatlakozót jelöljük R_{AB}-vel, stb. Végül négy tartomány a tetraéder egy-egy csúcsában csatlakozik, jelöljük ezeket R_A-val, R_B-vel, R_C-vel és R_D-vel. (2 pont)
Az E pont a tizenöt tartomány valamelyikének a belsejében helyezkedik el. Megvizsgáljuk, hogy ezek közül melyek felelnek meg a feladatban szereplő elválasztási követelményeknek.
A CDE sík csak akkor választhatja el egymástól az A és a B pontot, ha belevág a tetraéderbe, ezért az E pont nem tartozhat a tetraéder CD élegyenese mentén keletkező lapszögtartományának egyik kiegészítő lapszögtartományához sem. Ez a két lapszögtartomány az R_{ACD}, R_{AC}, R_{AD}, R_A, illetve az R_{BCD}, R_{BC}, R_{BD}, R_B tartományok egyesítése.
A fenti elválasztás esetén tehát E nem eshet e nyolc tartomány egyikébe sem. (3 pont)
Hasonlóképpen, ha az ADE sík elválasztja B-t és C-t, akkor E nem lehet az R_{ABD}, R_{AB}, R_{BD}, R_B, R_{ACD}, R_{AC}, R_{CD}, R_C tartományokban. Végül, ha az ABE sík elválasztja C-t és D-t, akkor E nem lehet az R_{ABC}, R_{AC}, R_{BC}, R_C, R_{ABD}, R_{AD}, R_{BD}, R_D tartományokban sem. (1 pont)
Látható, hogy a feladat feltételei a tizenöt tartomány közül csak a tetraéder belsejét nem zárják ki mint az E pont lehetséges elhelyezkedését. Tehát E az $ABCD$ tetraéder belső pontja. Ekkor persze D és E az ABC síknak ugyanarra az oldalára esik. (1 pont)

Második megoldás: Indirekt módon tegyük fel, hogy az ABC sík elválasztja a D pontot E-től. Ekkor a DE egyenes döfi az ABC síkot; nevezzük a döféspontot D'-nek. A feladatban szereplő térbeli elválasztási feltételek ezután rendre átfogalmazhatók az ABC síkon belüli, D'-re kirótt feltételekké. (3 pont)
A CDE sík elválasztja A-t és B-t, ezért ennek a síknak az ABC síkkal alkotott metszésvonala, a CD' egyenes elválasztja őket az ABC síkban. Ez azt jelenti, hogy a D' pont az ABC síknak az 1. ábra szerint árnyékolt (a határegyeneseket nem tartalmazó) tartományában van. (1 pont)



1. ábra 2. ábra 3. ábra

Hasonlóan, a második feltétel alapján az AD' egyenes elválasztja B-t és C-t, emiatt D'-nek a 2. ábrán árnyékolt tartományban kell lennie. (1 pont)
Végül a harmadik feltételből következően az AB egyenes elválasztja C-t és D'-t, az ennek megfelelő D' pontok a 3. ábrán árnyékolt félsíkban vannak. (1 pont)
Miután a három tartománynak nincs közös pontja, ellentmondásra jutottunk, ezért az ABC sík nem választja el D-t E-től. (1 pont)

Megjegyzés: Kiolvasható a megoldásból az is, hogy ugyanúgy ellentmondásra jutunk, ha csak annyit teszünk fel, hogy a D' döféspont a DE egyenesen az E pontnak ugyanazon az oldalán van, mint D. Ha az ellentétes oldalon van, akkor a harmadik feltételből a 3. ábrán éppen a komplementer félsíkot kapjuk, és így a három tartománynak nem üres a közös része: éppen az ABC háromszög belseje. Mindebből az következik, hogy a feladatbeli három feltétel akkor és csak akkor teljesül, ha az E pont az $ABCD$ tetraéder belső pontja.

Harmadik megoldás: Tekintsük az $ABCD$ tetraédert, és vizsgáljuk ehhez képest az E pont helyzetét. A tetraéder valamely lapsíkjához tartozó két féltér közül nevezzük azt pozitív féltérnek, amelyik a tetraédert tartalmazza, a másikat negatívnak. Az E ponthoz így négy előjelet (a $+1$ vagy -1 számok egyikét) rendelhetünk aszerint, hogy E a négy lapsíknak pozitív, illetve negatív oldalára esik. (1 pont)
Legyen ez a négy előjel a, b, c és d, mégpedig úgy, hogy a tartozzon a BCD lapsíkhoz, b a CDA-hoz, c a DAB-hez és d az ABC-hez. A feladatban szereplő elválasztási feltételek ezekre az előjelekre nézve rendre az $a = b$, $b = c$, illetve $c = d$ egyenlőségeket jelentik. (3 pont)
Ezekből $a = b = c = d$ adódik. Ez a közös érték csak úgy lehetne -1, ha E a negatív félterek közös pontja volna. A negatív féltereknek viszont nem lehet közös pontja. Egy ilyen pontba helyezkedve ugyanis a tetraéder mind a négy lapját kívülről látnánk, ami lehetetlen. (A tér bármely, a tetraéderhez nem tartozó E pontjából indíthatunk olyan félegyenest, amely a tetraéder határát két lapon is döfi; a második döféspontholz tartozó lapsíknak E biztosan a pozitív oldalán van.) (2 pont)
Tehát a közös előjel $+1$, vagyis az E pont az $ABCD$ tetraéder belsejében van. Ekkor persze D és E az ABC síknak ugyanarra az oldalára esik. (1 pont)

4. feladat

Van-e olyan, valós számokból álló, a $[0, 1]$ intervallumba eső A végtelen halmaz, amely nem tartalmaz háromtagú számtani sorozatot, de bármely két A-beli elem közé is esik A-beli elem?

Első megoldás: Megfelel pl. azon $[0, 1]$-beli véges tizedes törtek A halmaza, amelyekben csak 0 és 1 számjegy fordul elő. (4 pont)
A valóban nem tartalmaz háromtagú számtani sorozatot, hiszen $a, b, c \in A$, $a + c = 2b$ esetén $2b$ tizedes tört alakjában minden számjegy 0 vagy 2, és 2 csak úgy jöhet létre, hogy ezeken a helyeken a-ban és c-ben is 1-es számjegy áll, a többi helyen pedig 0, tehát csak $a = b = c$ lehetséges. (1 pont)
Ha $a, b \in A$, $a < b$ és a bennük szereplő tizedesjegyek száma kisebb k-nál, akkor legyen $c = a + 10^{-k}$. Ekkor $c \in A$ és $a < c < b$. (2 pont)

Megjegyzés: A konstrukció egy variánsa, ha A azokból a (végtelen) tizedes törtekből áll, amelyekben csak 0 és 1 számjegy fordul elő, de nullából végtelen sok van (a véges tizedes törteket úgy tekintjük, hogy egy idő után minden jegyük 0). Ha $a, b \in A$, $a < b$, akkor a következőképpen kaphatunk közéjük eső, A-beli c elemet: megkeressük az első olyan helyiértéket, ahol a-ban 0, b-ben pedig 1 áll, és legyen $c = a + 10^{-k}$, ahol k egy olyan későbbi helyiérték, amelynél a-ban 0 áll. Ennek a konstrukciónak az az érdekessége, hogy így kontinuum számosságú A halmazt kapunk, míg a többi esetben nyert A csak megszámlálható.

Megjegyezzük még, hogy az összes, csak 0 és 1 tizedesjegyből álló szám nem felelne meg (tehát azokat a számokat valóban ki kellett zárni, amelyekben egy idő múlva minden jegy 1-es): ekkor pl. 0,01111... és 0,10000... között nem lenne A-beli elem. (Az ily módon hibás konstrukció esetén maximum 4 pont adható.)

Második megoldás: Az A halmaz $a_0, a_1, \dots$ elemeit rekurzíve fogjuk megadni, az alábbi algoritmus szerint. Legyen (pl.) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$. Válasszuk meg először a_2-t úgy, hogy ne keletkezzék háromtagú számtani sorozat, azaz $a_2 \neq 1/2$. A következő lépésben válasszuk meg először a_3-at $a_0 (= 0)$ és a_2 közé, majd a_4-et a_2 és $a_1 (= 1)$ közé, hogy ne jöjjön létre háromtagú számtani sorozat. (2 pont)

Általában, ha már $a_0, a_1, \dots, a_{2^k}$ megvan, akkor ezek a $[0, 1]$ intervallumot 2^k részre osztják fel, és a következő lépésben ezekbe egymás után válasszunk egy-egy elemet úgy, hogy ne keletkezzék háromtagú számtani sorozat. (2 pont)

Egy-egy új szám kiválasztásakor a feltétel csak véges sok számot zár ki, hiszen egy x akkor nem választható a következő a_i-nek, ha az $a_0, \dots, a_{i-1}$ számok közül kettővel számtani sorozatot alkot, azaz $x + a = 2a'$ vagy $a + a' = 2x$ típusú egyenlőségnek tesz eleget, ahol a és a' az $a_0, \dots, a_{i-1}$ számok közül két különbözőt jelöl (összesen legfeljebb $3i(i-1)/2$ ilyen tilos x érték lehet). (2 pont)

Mivel egy intervallumban végtelen sok valós szám van, ezért az eljárás nem akad meg. A konstrukcióból az is világos, hogy bármely két A-beli elem között található A-beli elem. (1 pont)

A következő három megoldáshoz előrebocsátjuk, hogy az ott szereplő konstrukciók természetes módon felmerülő ötletek, azonban annak igazolása, hogy ezek valóban rendelkeznek a megkívánt tulajdonságokkal, a középiskolában (általában) nem szereplő ismeretekre támaszkodik.

Harmadik megoldás: Megfelelő A halmazt alkotnak azoknak az $1 < r \leq 10$ racionális számoknak a tízes alapú logaritmusai, amelyeknek a számlálója és a nevezője is (pozitív) prímszám. (2 pont)

Ezek között valóban nincs háromtagú számtani sorozat. Ha ugyanis a p_i, q_j prímekre

$$\lg \frac{p_1}{q_1} + \lg \frac{p_2}{q_2} = 2 \lg \frac{p_3}{q_3}, \quad \text{akkor} \quad \frac{p_1 p_2}{q_1 q_2} = \frac{p_3^2}{q_3^2}, \quad \text{azaz} \quad p_1 p_2 q_3^2 = q_1 q_2 p_3^2.$$

Mivel $p_3 \neq q_3$, ezért a számelmélet alaptétele alapján az egyenlőség csak úgy teljesülhet, ha $q_1 = q_2 = q_3$ és $p_1 = p_2 = p_3$. (2 pont)

Ahhoz, hogy bármely két A-beli elem közé is esik A-beli elem, megmutatjuk, hogy bármely két 1-nél nagyobb valós szám közé esik két prímszám hányadosaként felírható szám. (Ugyanez igazolható két tetszőleges valós számra is — abban az esetben persze negatív prímszámokat is igénybe kell vennünk — , azaz az ilyen számok mindenütt sűrűek a számegyenesen.) Legyen $d > c > 1$, jelölje továbbá p_n az n-edik prímszámot. A prímszámtételből következik, hogy $p_{n+1}/p_n \to 1$, ha $n \to \infty$. Ebből következik, hogy minden elég nagy n-re $p_{n+1}/p_n < d/c$. Tekintsük (egy ilyen n-re) az

$$a_1 = \frac{p_{n+1}}{p_n}; \quad a_2 = \frac{p_{n+2}}{p_n} = a_1 \cdot \frac{p_{n+2}}{p_{n+1}}; \quad a_3 = \frac{p_{n+3}}{p_n} = a_2 \cdot \frac{p_{n+3}}{p_{n+2}}; \quad \dots$$

sorozatot. Mivel $a_k \to \infty$ (ha $k \to \infty$), ezért van olyan k, amelyre $a_k > c$. Belátjuk, hogy a legkisebb ilyen k-ra $a_k = p_{n+k}/p_n$ egy c és d közé eső megfelelő szám lesz. Valóban:

$$c < a_k = a_{k-1}\frac{p_{n+k}}{p_{n+k-1}} < c \cdot \frac{d}{c} = d.$$

($k = 1$ esetén $a_{k-1} = a_0 = 1$ értendő.) (3 pont)

Negyedik megoldás: Megfelelő A halmazt alkotnak a 2 (vagy tetszőleges $r > 1$ racionális szám) összes negatív racionális kitevőjű hatványai. Mivel bármely két racionális szám közé esik racionális szám, és a 2^x függvény monoton, ezért bármely két A-beli elem közé esik A-beli elem. (2 pont)
Megmutatjuk, hogy A-ban nincs háromtagú számtani sorozat. Tegyük fel indirekt, hogy lenne. Ekkor a három számot az $1/2$ pozitív racionális kitevőjű hatványaiként felírva és a kitevőket q közös nevezőre hozva $(1/2)^{a/q} + (1/2)^{b/q} = 2(1/2)^{c/q}$ teljesülne valamilyen $a > c > b > 0$ egészekkel. Ez azt jelenti, hogy $v = \sqrt[q]{1/2}$ gyöke az $f = x^a - 2x^c + x^b$ egész együtthatós polinomnak. (2 pont)
Ismeretes, hogy f ekkor osztható a v algebrai szám minimálpolinomjával, ami $g = 2x^q - 1$, hiszen g (a fordított Schönemann-kritérium alapján) irreducibilis a racionális test felett és $g(v) = 0$. A Gauss-lemmából adódik, hogy a hányadosnak is egész együtthatósnak kell lennie. A hányados főegyütthatója azonban $1/2$, és ezzel ellentmondásra jutottunk. (3 pont)

Ötödik megoldás: Megfelelő A halmazt alkotnak a π (vagy tetszőleges $t > 1$ transzcendens szám) összes negatív racionális kitevőjű hatványai. Mivel bármely két racionális szám közé esik racionális szám, és a π^x függvény monoton, ezért bármely két A-beli elem közé esik A-beli elem. (2 pont)
Megmutatjuk, hogy A-ban nincs háromtagú számtani sorozat. Tegyük fel indirekt, hogy lenne. Ekkor a három számot az $1/\pi$ pozitív racionális kitevőjű hatványaiként felírva és a kitevőket q közös nevezőre hozva $(1/\pi)^{a/q} + (1/\pi)^{b/q} = 2(1/\pi)^{c/q}$ teljesülne valamilyen $a > c > b > 0$ egészekkel. Ez azt jelenti, hogy $v = \sqrt[q]{1/\pi}$ gyöke az $f = x^a - 2x^c + x^b$ egész együtthatós polinomnak. (2 pont)
Ez azt jelenti, hogy v algebrai szám. Azonban ekkor $\pi = 1/v^q$ is algebrai lenne, mert algebrai számok szorzata és reciproka is algebrai. Ez azonban ellentmondás, hiszen a π transzcendens. (3 pont)

5. feladat

Mely $n \geq 2007$ egészek rendelkeznek az alábbi tulajdonsággal: bármely három különböző, n-nél nem nagyobb és az n-hez relatív prím pozitív egész összege is relatív prím n-hez?

Megoldás: A kettőhatványok ilyenek, hiszen a hozzájuk relatív prímek pontosan a páratlan számok, és három páratlan szám összege is páratlan. (1 pont)
Megmutatjuk, hogy más nincs, pontosabban, hogy ha $n > 14$ és nem kettőhatvány, akkor található három különböző, nála kisebb, hozzá relatív prím pozitív egész, amelyek összege már nem relatív prím n-hez.

Legyen t az n legnagyobb páratlan osztója, azaz $n = 2^k t$, ahol $k \geq 0$, t páratlan és $t > 1$ (hiszen az n nem kettőhatvány).
Vegyük észre, hogy $1 + 3 + (t - 4) = t$, ami nem relatív prím n-hez. Ha az n nem osztható 3-mal (és így t sem), akkor az 1 és a 3 relatív prímek n-hez, továbbá $t-4$ is az (és $t-4 > 0$, hiszen most $t \geq 5$): ha p a $t-4$ és az n egy közös prímosztója lenne, akkor $t-4$ páratlansága miatt $p > 2$, tehát p osztója t-nek is, ekkor viszont $t - (t - 4) = 4$-nek is, ami lehetetlen.
(2 pont)
Így (ha az n nem osztható 3-mal, akkor) készen vagyunk, kivéve ha a három szám nem mind különböző, azaz $t - 4 = 1$ vagy $t - 4 = 3$. Az első esetben $n = 2^k \cdot 5$, ekkor 1, 3, 11 relatív prímek n-hez, de az összegük nem az. A második esetben $n = 2^k \cdot 7$, ekkor 1, 3, 17 relatív prímek n-hez, de az összegük nem az. (1 pont)
Ha az n osztható 3-mal, akkor a $2t - 9 = 1 + (t - 2) + (t - 8)$ összegből indulunk ki. A három tag relatív prím az n-hez, ez az előzőekhez teljesen hasonlóan igazolható, $2t - 9$ viszont nem az, hiszen a 3 közös osztójuk. (2 pont)
Így csak akkor nem vagyunk még készen, ha $t - 2 = 1$ vagy $t - 8 = 1$ (és mivel t osztható 3-mal, ezért $t - 8 < 0$ is csak $t = 3$-ra lehetséges). Ekkor $n = 2^k \cdot 3$, illetve $n = 2^k \cdot 9$. Mindkét esetben 1, 7, 13 relatív prímek n-hez, de az összegük nem az. (1 pont)

Megjegyzés: A 7, 9 és 14 sem jó, hiszen $1+2+4 = 7$, $1+4+7 = 12$, illetve $1+9+11 = 21$. Így könnyen adódik, hogy a kettőhatványokon kívül csak az 5, a 10 és a 12 rendelkezik a megadott tulajdonsággal (valamint azok a számok, amelyekhez kevesebb, mint három különböző, náluk kisebb, hozzájuk relatív prím pozitív egész létezik, hiszen ezekre a feltétel üres; közülük a nem kettőhatványok a 3 és a 6.)