



GIMNÁZIUM

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2008-2009. tanévi első fordulójának feladatai matematikából, a II. kategória számára

1. Határozzuk meg az alábbi egyenletrendszer valós megoldásait.

$$(1) \quad x^3 + y^3 = x,$$

$$(2) \quad 3x^2y + 3xy^2 = y.$$

2. Tekintsük azokat a négyjegyű pozitív egész számokat, amelyeknek minden jegye különböző.

(a) Hány ilyen szám van?

(b) Mennyi ezeknek a számoknak az összege?

(c) Növekvő sorrendbe állítva őket melyik lesz a 2008-ik? (Az 1023 az első.)

3. Az egyenlőszárú ABC háromszögben $AB = AC$. BC egy tetszőleges belső P pontjából a szárakkal párhuzamosokat húzunk. Az AC -vel párhuzamos az AB -t Q -ban, az AB -vel párhuzamos az AC -t R -ben metszi. Határozzuk meg a PQR háromszögek súlypontjának halmazát, mértani helyét.

4. Adottak az A , B és C számok:

$$A = \frac{1}{2 - \sqrt{3}}, \quad B = \left(\sqrt{5} - \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}} \right) \cdot \left(\sqrt{5} + \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{3}} \right), \quad C = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}.$$

Igazoljuk, hogy bármely pozitív egész n esetén irracionális az alábbi szám:

$$\sqrt{(A + B - C)n + 2}.$$

5. A pozitív valós p paraméter segítségével definiáljuk a valós számok halmazán az f függvényt:

$$f(x) = \begin{cases} p|x - 4| - 4p & \text{ha } x \geq 0, \\ -p|x + 4| + 4p & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Határozzuk meg p értékét, ha tudjuk, hogy egyetlen olyan négyzet van, amelynek minden csúcsa rajta van f grafikonján.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.