Oktatási Hivatal

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2008-2009. tanévi második fordulójának feladatmegoldásai matematikából, a II. kategória számára

1. Adjuk meg a valós számoknak azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az alábbi f függvény értelmezhető és határozzuk meg a függvény értékkészletét ezen az értelmezési tartományon.

$$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x-\sqrt{2-x}}}.$$

Megoldás: $\sqrt{2-x}$ értelmezett, ha $2-x\ge 0$, azaz $2\ge x$ (i).
$\sqrt{x-\sqrt{2-x}}$ értelmezett, ha $x-\sqrt{2-x}\ge 0$, azaz

$$x\ge\sqrt{2-x}. \tag{1}$$

Mivel $\sqrt{2-x}\ge 0$, ezért (1) csak úgy teljesülhet, ha $x\ge 0$ (ii). Tehát (1) mindkét oldala a továbbiakban nem negatív, négyzetre emeljük mindkét oldalt, majd 0-ra rendezve kapjuk

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1)\ge 0. \tag{2}$$

(2) megoldása az $x\le -2$ és $1\le x$ (iii). Az eddigi (i), (ii) és (iii) feltételek alapján $1\le x\le 2$ (iv).

$f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x-\sqrt{2-x}}}$ értelmezett, ha $1\ge\sqrt{x-\sqrt{2-x}}$. Ennek mindkét oldala nemnegatív, négyzetre emelhetünk, így $1\ge x-\sqrt{2-x}$ adódik, átrendezve $\sqrt{2-x}\ge x-1$. Ennek bal oldala nem negatív és (iv) feltétel mellett a jobb oldal is, így újra négyzetre emelve $2-x\ge x^2-2x+1$. Ennek megoldása az $\frac{1-\sqrt5}{2}\le x\le\frac{1+\sqrt5}{2}$ (v). Az (iv) és (v) feltételeket összevetve az f függvény legbővebb lehetséges értelmezési tartománya:

$$1\le x\le\frac{1+\sqrt5}{2}.$$ 4 pont

Az értékkészlet meghatározására két lehetséges megoldást mutatunk.

1. Használjuk ki, hogy egy gyökös kifejezés értéke legalább 0. Ezek szerint $0\le f(x)$. Másrészt $0\le\sqrt{x-\sqrt{2-x}}$ miatt $1-\sqrt{x-\sqrt{2-x}}\le 1$, tehát $f(x)\le 1$. Függvényünk korlátos, minimumát és maximumát felveszi, hiszen $f(1)=1$ és $f(\frac{1+\sqrt5}{2})=0$. Mivel a függvény folytonos, ezért értékkészlete a $[0;1]$ intervallum. 3 pont

2. Megmutatjuk, hogy f szigorúan monoton csökkenő. Legyen az értelmezési tartomány két eleme $x_1<x_2$. Ekkor

$$2-x_1>2-x_2,\quad\text{azaz}\quad\sqrt{2-x_1}>\sqrt{2-x_2}\quad\text{tehát}\quad x_1-\sqrt{2-x_1}<x_2-\sqrt{2-x_2}.$$

Ebből adódik, hogy

$$1-\sqrt{x_1-\sqrt{2-x_1}}>1-\sqrt{x_2-\sqrt{2-x_2}}\quad\text{amiből}\quad f(x_1)>f(x_2).$$

Mivel az f függvény folytonos, értékkészlete az értelmezési tartomány és a monotonitás figyelembe vételével

$$\left[f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right); f(1)\right] = [0;1]. \qquad \text{3 pont}$$

Összesen: 7 pont

2. Határozzuk meg a következő egyenlet valós megoldásait. ($[y]$ az y valós szám egész részét jelöli.)

$$\left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] = \frac{x}{7}.$$

Megoldás: Az egyenlet mindkét oldalát 7-tel szorozzuk.

$$7\cdot\left[\frac{x}{2}\right] - 7\cdot\left[\frac{x}{3}\right] = x. \tag{1}$$

A bal oldalon egész szám áll, tehát x is egész. 1 pont

Az egész részes kifejezések értéke attól függ, hogy x osztható-e 2-vel illetve 3-mal. Mivel a 2 és 3 legkisebb közös többszöröse 6, ezért x 6-os maradéka szerint tekintjük át az eseteket. 2 pont

Ha $x = 6k + r$ alakú, akkor (1) így alakul, $0 \le r \le 6$ esetén:

r	(1)	k	x
0	$7\cdot 3k - 7\cdot 2k = 6k$	0	0
1	$7\cdot 3k - 7\cdot 2k = 6k+1$	1	7
2	$7\cdot(3k+1) - 7\cdot 2k = 6k+2$	-5	-28
3	$7\cdot(3k+1) - 7\cdot(2k+1) = 6k+3$	3	21
4	$7\cdot(3k+2) - 7\cdot(2k+1) = 6k+4$	-3	-14
5	$7\cdot(3k+2) - 7\cdot(2k+1) = 6k+5$	-2	-7

A feladatban kitűzött egyenletnek tehát 6 valós megoldása van, ezek:

$$-28, \quad -14, \quad -7, \quad 0, \quad 7 \quad \text{és} \quad 21. \qquad \text{4 pont}$$

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Véges sok eset vizsgálatára vezet a következő gondolatmenet. A feladatban kitűzött egyenlet bal oldala egész, ezért a jobb oldal is az, tehát x 7-nek többese. $\frac{x}{2} - \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$, így a bal oldal becsülhető

$$\frac{x}{6} - 1 < \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] < \frac{x}{6} + 1.$$

Ha $x > 42$ akkor $\frac{x}{7} < \frac{x}{6} - 1$, ha $x < -42$, akkor $\frac{x}{6} + 1 < \frac{x}{7}$. Ezek alapján elég végignézni -42 és 42 között a héttel osztható számokat.

3. Egy 1 milliárd lakosú országban egy olcsó AIDS teszt bevezetését tervezik. Tudjuk, hogy kb. minden ezredik ember fertőzött. Kiderült, hogy a betegek 99,9 %-ánál pozitív, viszont sajnos az egészségesek 0,1 %-ánál is pozitív eredményt ad a teszt. Ilyen paraméterek mellett elvetették a használatát. Egy matematikus azt javasolta, hogy végezzék el kétszer egymás után a vizsgálatot és ha mindkettő pozitív, csak akkor küldjék orvoshoz a pácienst. Így már bevezethető lett a teszt. A következő két kérdéssel arra keressük a választ, mi ennek a magyarázata.

(a) Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha az első teszt pozitív.

(b) Számítsuk ki mennyi a valószínűsége, hogy beteg valaki, ha mind a két teszt pozitív.

Megoldás: (a) Az 1 milliárd lakosból a betegek száma 1 millió, ebből 999 000-nél - legyenek ők az A halmaz- pozitív a teszt. A nem betegek 999 millióan vannak, közülük 999 000-nél lesz pozitív az eredmény, legyenek ők a B halmaz. Így annak a p_1 valószínűsége, hogy egy pozitív teszt esetén a vizsgált egyén beteg

$$p_1 = \frac{|A|}{|A| + |B|} = \frac{999000}{999000 + 999000} = 0,5 \quad \text{azaz} \quad 50\%.$$

Bármilyen olcsó is a teszt, ez az eredmény nem megfelelő. 3 pont

(b) Tekintsünk egy embert, akinél mindkét teszt pozitív. Tartozhat az A csoportba, a 999000 közül 998001 esetben a második teszt is pozitív, jelölje őket a C halmaz. Tartozhat a B csoportba, a 999000 közül 999-nél lesz a második teszt is pozitív, ők alkotják a D halmazt. Így annak a p_2 valószínűsége, hogy két pozitív teszt esetén beteg valaki

$$p_2 = \frac{|C|}{|C| + |D|} = \frac{998001}{998001 + 999} = 0,999 \quad \text{azaz} \quad 99,9\%.$$

Ez már sokkal jobb eredmény, a szűrővizsgálat bevezethető. 4 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A Bayes-tétel alapján azonnal felírható a keresett két valószínűség:

$$p_1 = \frac{0,999 \cdot 0,001}{0,999 \cdot 0,001 + 0001 \cdot 0,999} = 0,5; \quad p_2 = \frac{0,999^2 \cdot 0,001}{0,999^2 \cdot 0,001 + 0,001^2 \cdot 0,999} = 0,999.$$

4. Az a, b, c oldalú t területű hegyesszögű háromszögre

$$abc = a + b + c$$

teljesül. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < t < \frac{3}{2}.$$

Megoldás: Nem megy az általánosság rovására, ha feltételezzük, hogy $a \leq b \leq c$. Kifejezzük ab-t a feladatban megadott $abc = a + b + c$ feltételből, és felülről becsüljük a $a \leq b \leq c$ feltétel felhasználásával:

$$ab = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} + 1 \leq 3.$$

Használjuk ki, hogy $0 < \sin\gamma < 1$, így a terület felülről becsülhető:

$$t = \frac{ab\sin\gamma}{2} < \frac{3\cdot 1}{2} \quad \text{azaz} \quad t < \frac{3}{2}. \qquad 3 \text{ pont}$$

A feladatban szereplő $abc = a + b + c$ feltételből $c = \dfrac{a+b}{ab-1}$. Ezt beírjuk a háromszög egyenlőtlenségbe

$$c < a + b, \quad \text{azaz} \quad \frac{a+b}{ab-1} < a + b, \quad \text{amiből} \quad 2 < ab.$$

Mivel a legnagyobb szög γ és a háromszög hegyesszögű, így $60^\circ \le \gamma < 90^\circ$, így

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \le \sin\gamma < 1.$$

Ennek megfelelően

$$t = \frac{ab\sin\gamma}{2} > \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \quad \text{azaz} \quad t > \frac{\sqrt{3}}{2}. \qquad 4 \text{ pont}$$

Összesen: 7 pont

A felső becslést másként is bizonyítjuk. Jelölje a háromszög köré írt kör sugarát R. Használjuk ki, hogy $abc = 4Rt$, illetve $a = 2R\sin\alpha$, $b = 2R\sin\beta$ és $c = 2R\sin\gamma$. A feladat szövegében szereplő feltétel szerint tehát

$$t = \frac{abc}{4R} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{2}.$$

A szögek színuszainak értéke nem lehet 1-nél nagyobb. Ebből a felső korlát azonnal adódik, hiszen legfeljebb egy derékszög lehet, így

$$t = \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{2} < \frac{3}{2}.$$