



**Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
2008-2009. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatai  
matematikából, a II. kategória számára**

1. Határozzuk meg azon  $k_1, k_2, \dots, k_n$  és  $n$  pozitív egészeket, amelyekre

$$k_1 + k_2 + \dots + k_n = 5n - 4 \quad \text{és} \quad \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \dots + \frac{1}{k_n} = 1.$$

2. A szabályos  $ABC$  háromszög belső  $P$  pontjának az  $AB$ ,  $BC$  és  $CA$  oldalakra eső merőleges vetülete legyen rendre  $C'$ ,  $A'$  és  $B'$ . Jelölje az  $APC'$ ,  $BPA'$ ,  $CPB'$  és  $APB'$ ,  $BPC'$ ,  $CPA'$  háromszögekbe írt körök sugarát rendre  $r_1, r_2, r_3$  és  $r_4, r_5, r_6$ . Bizonyítsuk be, hogy

$$r_1 + r_2 + r_3 = r_4 + r_5 + r_6.$$

3. A  $H = \{1; 2; 3; \dots; 9\}$  halmaz egy  $P$  *partíciójának* nevezzük azt, ha  $H$ -t diszjunkt részhalmazainak uniójaként írjuk fel. (A részhalmazok páronként közös elem nélküliek.) Jelölje  $P(n)$  az  $n$ -t tartalmazó részhalmaz elemeinek számát ( $n \in H$ ). Például a  $P : \{1; 4; 5\} \cup \{2\} \cup \{3; 6; 7; 8; 9\} = H$  partíció esetén  $P(6) = 5$ .

Bizonyítsuk be, hogy  $H$  bármely  $P_1$  és  $P_2$  partíciójára található két különböző  $H$ -beli  $n$  és  $m$  elem, amelyekre  $P_1(n) = P_1(m)$  és  $P_2(n) = P_2(m)$ .

Valamennyi feladat 7 pontot ér.