Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2008–2009-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

Az első (iskolai) forduló feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Legyen $f(x)=2$, ha $x\geq 0$, és $f(x)=1$, ha $x<0$. Legyen továbbá $g(x)=f(x)/f(x-1)$, és végül
$$h(x)=g(x)+2g(x/2)+3g(x/3)+\ldots+2008g(x/2008).$$
Számítsuk ki $h(\pi)$-t.

2. Tükrözzük az ABC hegyesszögű háromszög egy belső pontját az AB, BC, CA oldalakra, a tükörképeket jelölje rendre R, P, ill. Q. Bizonyítsuk be, hogy az AQR, PBR és PQC köröknek van közös pontja.

3. Legyen n pozitív egész. Mutassuk meg, hogy akkor és csak akkor létezik racionális számok négyzeteiből álló, n differenciájú, háromtagú számtani sorozat, ha létezik n területű, racionális oldalú, derékszögű háromszög.

4. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok körében:
$$\frac{1}{x-1}+\frac{3}{x-3}+\frac{7}{x-7}+\frac{9}{x-9}=x^2-5x-4.$$

5. Mennyi $2\cos\alpha+6\cos\beta+3\cos\gamma$ minimuma, ha $\alpha,\ \beta,\ \gamma\geq 0$ és $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.